Vestibular 2002/ UNICAMP

Provas resolvidas e comentadas pela profa.Maria Antônia Conceição Gouveia.

1ª fase

Questão 1

Segundo dados do Ministério do Trabalho e Emprego (MTE), no período de julho de 2000 a junho de 2001, houve dez milhões, cento e noventa e cinco mil,seiscentos e setenta e uma admissões ao mercado formal de trabalho no Brasil, e os desligamentos somaram nove milhões, quinhentos e cinqüenta e quatro mil, cento e noventa e nove. Pergunta-se:

a) Quantos novos empregos formais foram criados durante o período referido?

b) Sabendo-se que esse número de novos empregos resultou em um acréscimo de 3% no número de pessoas formalmente empregadas em julho de 2000,qual o número de pessoas formalmente empregadas em junho de 2001?

RESOLUÇÃO:

a) Para encontrar o número pedido basta estabelecer a diferença
10 195 671 – 9 554 199 = **641 472**.

b) Sendo 641.472 novos empregos igual a 3% dos empregados em julho de 2000, considerando como x o número de empregados em julho de 2000, temos a relação:

$$0{,}03x = 641472 \Rightarrow x = \frac{641472}{0{,}03} = 21382400.$$

Logo as pessoas empregadas em junho de 2001 era de 21 382 400 + 641 472 =**22 023 872**.

Questão 2

Uma comissária de bordo foi convocada para fazer hora extra, trabalhando em um vôo noturno da ponte aérea entre as cidades A e B. O pagamento das horas extras é feito em minutos decorridos entre a decolagem do aeroporto da cidade A e a aterrissagem no mesmo aeroporto, após a volta da cidade B. O tempo de vôo entre A e B e B e A é o mesmo. A diferença de fuso horário entre as duas cidades é de uma hora. Sabe-se que a decolagem de A ocorreu às 2h 00min (horário local), a aterrissagem em B às 2h 55min (horário local) e a decolagem de B, para a viagem de volta, às 3h 25min(horário local). Pergunta-se:

a) Qual foi a duração do vôo entre A e B?

b) Supondo que a referida receba R$ 30,00 por hora extra, quanto deve receber pelo trabalho em questão?

RESOLUÇÃO:

a) Como o avião partiu de A às 2h 00min (horário local) e chegou em B às 2h 55min e como a diferença entre os fusos horários é de 1 hora, o tempo de vôo foi de
2h55min – (2h00min – 1h00min) = **1h 55min** (Considerando que a duração da viagem é de menos de 24horas).

b) O tempo total da viagem foi de $2 \times (1h55min) + (3h25min – 2h55min) =$
$3h\ 50min + 30min = 4h\ 20min = 4h + \frac{20}{60}h = 4\frac{1}{3}h = \frac{13}{3}h.$

Logo a comissária recebeu $\frac{13}{3} \times 30$ = **130 reais**.

2ª fase

Questão 1

Caminhando sempre com a mesma velocidade, a partir do marco zero, em uma pista circular, um pedestre chega à marca dos 2 500 metros às 8 horas, e aos 4 000 metros 8h15min.

a) A que horas e minutos o referido pedestre começou a caminhar?
b) Quantos metros tem a pista se o pedestre deu duas voltas completas em 1 hora e 40 minutos?

RESOLUÇÃO:

a) Em 15 min o pedestre andou (4 000 – 2 500) metros = 1 500metros;
1500m : 15min = 100m/min, que é a sua velocidade média
2500m : 100m/min = 25 min (tempo gasto do marco zero ao marco 2500m).
Logo ele começou a andar exatamente às (8h – 25 min) = 7h35min.
b) Como a sua velocidade média é de 100m/min, em 1h 40 min , percorreu
(60 + 40). 100m = 10000m, assim a pista tem (10 000 : 2)m = 5 000m.

Questão 2

Em uma empresa 1/3 dos funcionários tem idade menor que 30 anos, 1/4 tem idade entre 30 e 40 anos e 40 funcionários têm mais de 40 anos.

a) Quantos funcionários têm a referida empresa?
b) Quantos deles têm pelo menos 30 anos?

RESOLUÇÃO:

a) Considerando que a empresa tem x funcionários e traduzindo as informações por uma sentença matemática, vem : $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 40 = x \Rightarrow 4x + 3x + 480 = 12x \Rightarrow 5x = 480 \Rightarrow x = 96$.

A empresa tem 96 funcionários.

b) Os que têm pelo menos 30 anos são aqueles cujas idades pertencem ao intervalo [30,40]
$\frac{x}{4} + 40 =$ 24 + 40 = 64 funcionários.

Questão 3

Uma sala retangular medindo 3m por 4,25m deve ser ladrilhada com ladrilhos quadrados iguais. Supondo que não haja espaço entre os ladrilhos vizinhos, pergunta-se:

a) Qual deve ser a dimensão máxima, em centímetros de cada um desses ladrilhos para que a sala possa ser ladrilhada sem cortar nenhum ladrilho?

b) Quantos desses mesmos ladrilhos são necessários?

RESOLUÇÃO:

a) A sala em centímetros tem $300\text{cm} \times 425\text{cm}$

Sendo $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ e $425 = 17 \times 5^2 \Rightarrow \text{mdc}(300,425) = 5^2 = 25$.

A dimensão máxima é de 25 cm.

b) São necessários $(300 : 25) \times (425 : 25) = 12 \times 17 = 204$ ladrilhos.

Questão 4

Uma transportadora transporta com caminhões 60 toneladas de açúcar por dia. Devido a problemas operacionais, em um certo dia cada caminhão foi carregado com 500kg a menos que o usual, tendo sido necessário, naquele dia, alugar mais 4 caminhões.

a) Quantos caminhões foram necessários naquele dia?

b) Quantos quilogramas transportou cada caminhão naquele dia?

RESOLUÇÃO:

a) Consideremos que a transportadora tem **x** caminhões. Então cada caminhão transporta por dia $\frac{60}{x}$ toneladas de açúcar.

No dia em questão cada caminhão transportou $\left(\frac{60}{x} - 0,5\right) = \frac{60}{x+4}$ toneladas de açúcar.

Resolvendo esta equação teremos o valor de x (quantidade de caminhões utilizada normalmente para o transporte do açúcar).

$$\left(\frac{60}{x} - 0,5\right) = \frac{60}{x+4} \Rightarrow \left(\frac{60}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{60}{x+4} \Rightarrow \frac{120-x}{2x} = \frac{60}{x+4} \Rightarrow (120-x)(x+4) = 120x$$

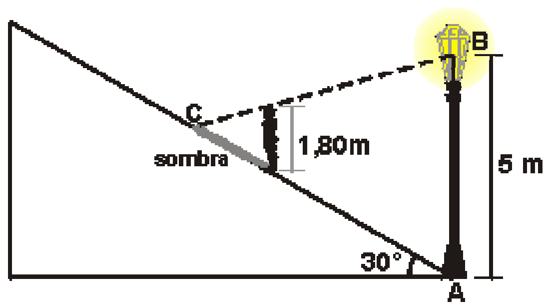
$120x - 4x - x^2 + 480 = 120x \Rightarrow x^2 + 4x - 480 = 0 \Rightarrow x = -24$ ou $x = 20$ .caminhões.

Logo foram necessários naquele dia (20 + 4) caminhões.

b) Cada caminhão naquele dia transportou $\frac{60}{x+4}$ toneladas de açúcar que equivalem a $\frac{60\,000}{x+4}$ quilogramas $\Rightarrow \frac{60\,000}{20+4} = \frac{60\,000}{24} = 2\,500$ quilogramas.

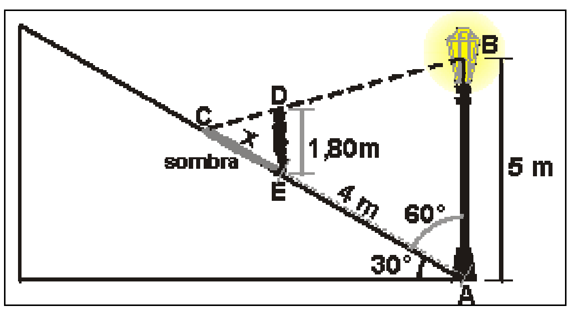
Questão 5

Um homem de 1,80m de altura, sobe uma ladeira com inclinação de 30°, conforme mostra a figura. No ponto A está um ponto vertical de 5 metros de altura. Com uma lâmpada no ponto B. Pede-se para



a) Calcular o comprimento da sombra do homem depois que ele subiu 4 metros ladeira acima.
b) Calcular a área do triângulo ABC

RESOLUÇÃO:



a) Fazendo a leitura da questão proposta através da figura, acrescentamos a esta alguns dados, através dos quais podemos perceber, supondo a verticalidade do poste e do homem, em relação ao plano horizontal, que os triângulos ABC e DEC são semelhantes, porque $\overline{DE} \,//\, \overline{AB}$ e $\overline{CE}$ um segmento transversal aos dois segmentos. Assim

$$\frac{5}{1{,}8} = \frac{4+x}{x} \Rightarrow 5x = 7{,}2 + 1{,}8x \Rightarrow 3{,}2x = 7{,}2 \Rightarrow x = \frac{72}{32} = 2{,}25\,\text{m}.$$

b) A área do triângulo ABC pode ser calculada da seguinte forma

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \operatorname{sen} 60^o = \frac{1}{2} \times 5 \times (4 + 2{,}25) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{31{,}25 \times 4\sqrt{3}}{4 \times 4} = \frac{125\sqrt{3}}{16}\ \text{m}^2$$

Questão 6

Em Matemática, um número natural a é chamado ***palíndromo*** se seus algarismos, escritos em orem inversa, produzem o mesmo número.Por exemplo 8, 22 e 373 são ***palíndromos***. Pergunta-se:

a) Quantos números naturais ***palíndromos*** existem entre 1 e 9 999?
b) Escolhendo-se ao acaso um número natural entre 1 e 9 999, qual é a probabilidade de que esse número seja ***palíndromo***? Tal probabilidade é maior ou menor que 2 % Justifique sua resposta?

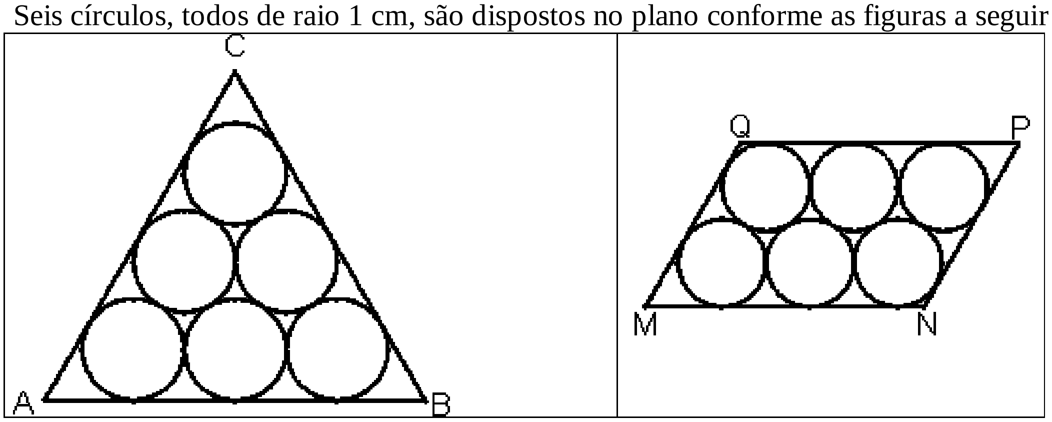
RESOLUÇÃO:

a) Como o problema nos pede os números palíndromos existentes entre 1 e 9 999, embora estes sejam números palíndromos, foram excluídos devido à redação.
De 2 até 9 são **9** números.
De 10 até 99 são **9** números (11, 22, 33, 44, 55, 66, 77,88,99).
De 100 até 999 são aqueles que têm como extremidades o mesmo algarismo, e o central também o mesmo algarismo das extremidades ou qualquer um diferente dele, assim são $\mathbf{9 \times 10 = 90}$ possibilidades.
De 1000 até 9998 são aqueles que têm como extremidades o mesmo algarismo e os dois centrais iguais, logo as possibilidades são $\mathbf{9 \times 10 - 1 = 89}$ números palíndromos (O 9 999 foi excluído).
Assim o total de números palíndromos entre 1 e 9 999 é : 9 + 9 +90 +89 = **197**.

b) Entre 1 e 9 999 existem (9 999 –1-1) números, dos quais 197 são palíndromos, logo a taxa de porcentagem destes números no intervalo em questão é de
$\frac{197}{9997} = 0,01970.. \approx 1,92\% > 2\%$.

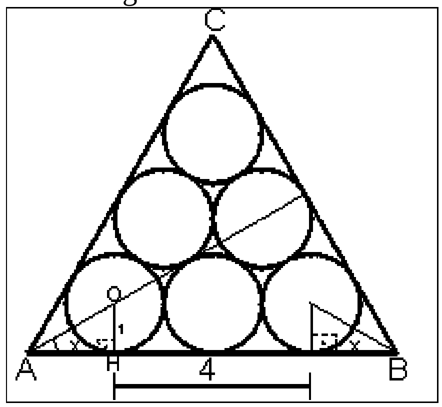
Questão 7

Seis círculos, todos de raio 1 cm, são dispostos no plano conforme as figuras a seguir



RESOLUÇÃO:

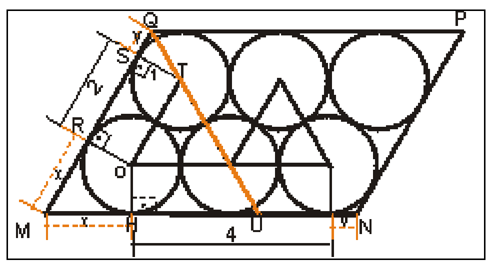
a) Como o triângulo ABC é eqüilátero, pois os seus três lados são tangentes a cada três circunferências tangentes externamente entre si. $\overline{AO}$ é bissetriz do ângulo CÂB então no triângulo retângulo AHO o ângulo OÂH mede 30°.



Vemos então que tg 30° = $\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{x} \Rightarrow \sqrt{3}x = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$.

Assim AB = $(2\sqrt{3}+4)$ cm $\Rightarrow$ S = $\frac{(2\sqrt{3}+4)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(12+16+16\sqrt{3})\sqrt{3}}{4} = (7\sqrt{3}+12)$ cm²

b)



No quadrilátero ROHM analisando a figura vemos que RÔH mede 120°, logo o ângulo $R\hat{M}H$ mede 60° $\Rightarrow$ M$\hat{Q}$P mede 120°. Como $\overline{QU}$ é bissetriz deste ângulo , S$\hat{Q}$T mede 60°.

Logo tg 60° = $\frac{1}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{y} \Rightarrow \sqrt{3}$ y = 1 $\Rightarrow$ y = $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Assim : MQ = x + 2 +y = $\sqrt{3}+2+\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}+6}{3}$ cm

MN = x + 4 + y = $\sqrt{3}+4+\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}+12}{3}$ cm.

Então a área do paralelogramo MNPQ é o dobro da área do triângulo MQN, ou seja,

$S = 2 \times \frac{1}{2} MQ \times MN \times sen60°$,então

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{4\sqrt{3}+12}{3}\right)\left(\frac{4\sqrt{3}+6}{3}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{48+72++72\sqrt{3}}{9}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{40+24\sqrt{3}}{3}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$S = \frac{20\sqrt{3}+36}{3}$ cm².

Fazendo a comparação Desta área com $\left(7\sqrt{3}+12\right)$cm² , área do triângulo ABC,, temos

$\frac{20\sqrt{3}+36}{3} < \left(7\sqrt{3}+12\right)$ porque $\frac{20\sqrt{3}+36}{3} < \frac{21\sqrt{3}+36}{3} \Rightarrow \frac{20\sqrt{3}}{3} < \frac{21\sqrt{3}}{3}$.

Então a área do paralelogramo MNPQ é menor que a do triângulo ABC.

Questão 8

Uma piscina, cuja capacidade é de 120cm³, leva 20 horas para ser esvaziada. O volume de água na piscina t horas após o início do processo de esvaziamento, é dado pela função $V(t) = a(b-t)^2$ para $0 \le t \le 20$ e $V(t) = 0$ para $t \ge 20$.

a) Calcule as constantes **a** e **b**.

b) Faça o gráfico da função da função V(t) para $t \in [0,30]$.

RESOLUÇÃO;

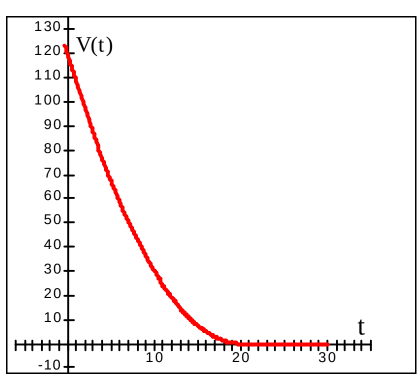
a) Se no instante inicial , t = 0, a piscina está totalmente cheia , temos que $V(0) = ab^2 = 120$. Se no instante inicial ela está completamente cheia e o tempo para esvaziá-la é de 20 horas, temos que $V(20) = a(b - 20)^2 = 0$. Resolvendo o sistema formado com essas suas equações temos:

$$\begin{cases} ab^2 = 120 \\ a(b-20)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow b - 20 = 0 \Rightarrow \mathbf{b = 20} \Rightarrow 400a = 120 \Rightarrow \mathbf{a = 0,3}\ .$$

b) $V(t) = 0,3(20 - t)^2 \Rightarrow V(t) = 0,3t^2 - 12t + 120$

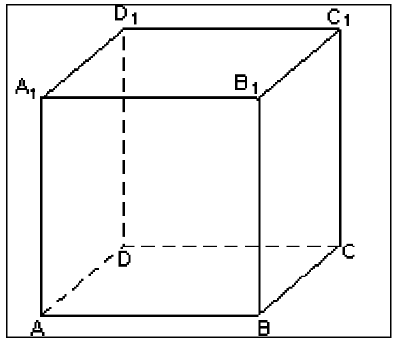
A função em questão é do 2º grau e tem uma única raiz que é t = 20, logo o seu vértice é o ponto (20,0), o ponto de interseção com o eixo das ordenadas é (0,120). Sendo ainda V(t) =0 para o intervalo de tempo em que $20 \le t \le 30$, o gráfico será um arco de parábola no intervalo de tempo pertencente a [0,20] e um segmento de reta no intervalo [20,30].

O gráfico então terá o seguinte formato :



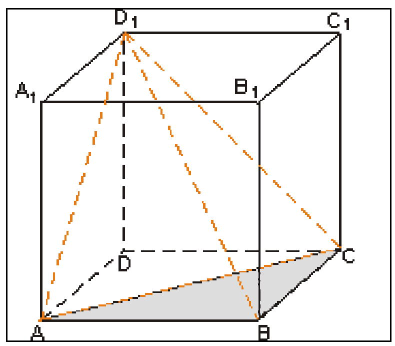
Questão 9º

O sólido da figura a seguir é um cubo cuja aresta mede 2 cm.



a) Calcule o volume da pirâmide $ABCD_1$.
b) Calcule a distância do vértice A ao plano que passa pelos pontos B, C e D_1.

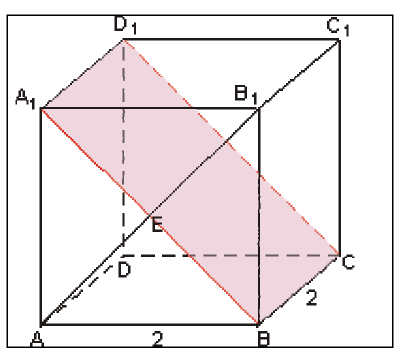
RESOLUÇÃO:



a) A pirâmide $ABCD_1$ é uma pirâmide triangular de altura $\overline{DD_1}$, pois este segmento é perpendicular ao plano do triângulo ABC.

Assim o volume da pirâmide $ABCD_1$ é $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times BC \times DD_1$

$V = \frac{1}{6} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$ cm³.



b) O plano que passa pelos pontos B, C e D_1 passa também pelo ponto A_1.

A diagonal $\overline{AB_1}$ é perpendicular à diagonal $\overline{A_1B}$ e ortogonal à diagonal $\overline{CD_1}$, logo é perpendicular ao plano definido pelos ponto B, C e D_1.

Logo a distância procurada é a medida do segmento $\overline{AE}$, que é exatamente à metade da diagonal $\overline{AB_1}$.

Logo AE = $\dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ cm.

Questão 10º

Considere o sistema linear abaixo, no qual a é um parâmetro real.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = -3 \end{cases}$$

a) Mostre que para a = 1, o sistema é impossível..
b) Encontre os valores do parâmetro a para os quais o sistema tem solução única.

RESOLUÇÃO:

a) Fazendo a = 1, ,temos o sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$. Para resolvê-lo, conservemos a primeira equação e multiplicando-a por –1, adicionemos o resultado sucessivamente às segunda e terceira equações: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 + 0 + 0 = 2 \\ 0 + 0 + 0 = -3 \end{cases}$. Vemos que as duas últimas igualdades são falsas. Logo o sistema é impossível.

b) Considerando o determinante formado com os coeficientes do sistema original e fazendo-o diferente de zero, teremos:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a^3 + 1 + 1 - a - a - a = 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 \neq 0 \Rightarrow$$

Sendo f(a) = a^3 -3a + 2 e f(1) = 1 –3 + 2 = 0, temos que o polinômio a^3 -3a + 2 é divisível por (a – 1). Aplicando Briot-Ruffini par efetuar a divisão de a^3 -3a + 2 por a –1 , temos

	1	0	-3	2
1	1	1	-2	0
1	1	2	0	

Assim a^3 -3a + 2 = $(a – 1)^2(a + 2)$. Então $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0$ para **a ≠ 1 e a ≠ -2**.

Questão 11^{O}

Considere a equação $2^{x} + m2^{2-x} - 2m - 2 = 0$, onde m é um número real.

a) Resolva essa equação para m = 1..
b) Encontre todos os valores de m para os quais a equação tem uma única raiz real.

RESOLUÇÃO:

a) $2^{x} + 2^{2-x} - 2 - 2 = 0$.

Fazendo $2^{x} = a$, temos a + $\frac{4}{a}$ -4 = 0 $\Rightarrow$ a² - 4a +4 = 0 $\Rightarrow$ a = 2 $\Rightarrow$ $2^{x} = 2 \Rightarrow$ **x = 1**.

b) $2^{x} + m2^{2-x} - 2m - 2 = 0 \Rightarrow 2^{x} + \frac{4m}{2^{x}} - 2m - 2 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - (2m+2)2^{x} + 4m = 0$

Esta equação pode ser resolvida como uma equação do 2º grau, e somente terá uma raiz única se o seu discriminante, b² - 4ac, for igual a zero.

Logo : $(2m+2)^{2} - 4(4m) = 0 \Rightarrow 4m^{2} + 8m + 4 - 16m = 0 \Rightarrow m^{2} - 2m + 1 = 0$.

(m-1)² = 0 $\Rightarrow$ **m=1**.

Questão 12^{O}

Sejam α, β e γ os ângulos internos de um triângulo.

a) Mostre que as tangentes desses três ângulos, não podem ser, todas elas, maiores ou iguais a 2.
b) Supondo que as tangentes dos três ângulos sejam **números inteiros positivos**, calcule essas tangentes.

RESOLUÇÃO:

a) Se α, β e γ, os ângulos internos de um triângulo ABC e considerando que

$$\begin{cases} \text{tg } \alpha \geq 2 \\ \text{tg } \beta \geq 2 \Rightarrow \text{que sendo } 2 > \sqrt{3}\text{, temos;} \\ \text{tg } \gamma \geq 2 \end{cases} \begin{cases} 60° < \alpha < 90° \\ 60° < \beta < 90° \Rightarrow 180° < \alpha + \beta + \gamma < 270° \\ 60° < \gamma < 90° \end{cases}$$
, o que é impossível, porque a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°.

b)

- α+β + γ = 180° $\Rightarrow$ α+β = 180° - γ $\Rightarrow$ tg (α+β) = tg(180° - γ) $\Rightarrow$ $\frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg}\alpha \text{ tg}\beta} = -\text{tg}\gamma$.

Considerando que c = 2 e tg γ = 1 $\Rightarrow \frac{2 + \text{tg } \beta}{1 - 2\text{tg } \beta} = -1 \Rightarrow 2 + \text{tg } \beta = -1 + 2\text{tg } \beta \Rightarrow \text{tg } \beta = 3$

Nesse caso temos as tangentes iguais a **1,2 e 3**.

- Consideremos tg α = tg γ = 2 $\Rightarrow$ arc tg α = arc tg γ ≈ 63,43°.

63,43° + 63,43° + β =180° $\Rightarrow$ β =53,14°, cuja tangente não é um número inteiro.

Só existe uma solução: **1,2 e 3**.