Resolução por Maria Antônia Conceição Gouveia da Prova de Matemática _ Vestibular 2005 da Ufba _ 1ª fase

QUESTÕES de 01 a 08

INSTRUÇÃO: Assinale as proposições verdadeiras, some os números a elas
associados e marque o resultado na Folha de Respostas.

Questão 01

Sobre números reais, é correto afirmar:

(01) Se x e y são positivos, então $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ se e somente se $x < y$, $x > 1$ e $y > 1$.
(02) Se x e y são números racionais que representam, respectivamente, a medida do raio da base e a altura de um cilindro circular reto, expressos em u.c., então o volume do cilindro, expresso em u.v., é um número irracional.
(04) Se x e y são inteiros positivos ímpares consecutivos e x y = 1295, então x e y são números primos.
(08) Para cada $n \in \mathbf{N}$, $2^{n+5} - 3$ é um número primo.
(16) Se $a > 0$, então a equação $x^4 - a^2 = 0$ possui, no máximo, duas soluções reais distintas.

Resolução:

01) Contra-exemplo

x > 0	y > 0	$\sqrt{x} < \sqrt{y}$	x	y	x > 1	y > 1
V	V	$\sqrt{0{,}04} < \sqrt{4}$ (V)	0,2	2	F	V

Afirmativa **F**alsa.

02) Se x e y são números racionais que representam, respectivamente, a medida do raio da base e a altura de um cilindro circular reto, então x e y são números racionais positivos e o produto é um numero racional positivo. Logo $x^2y\pi$, volume do cilindro em questão, é um número irracional, pois representa o produto de um número racional não nulo por um número irracional.

Afirmativa **V**erdadeira.

04) x.y =1295 = 5 $\times$ 7 $\times$ 37 = 35 $\times$ 37 (x e y são números inteiros positivos e consecutivos), então x = 35 e y = 37, mas 35 não é número primo.

Afirmativa **F**alsa.

08)

n	$2^{n+5} - 3$
0	29
1	61
2	125

n = 2 é um contra exemplo pois 125 não é um número primo.

Afirmativa **F**alsa.

16) $x^4 - a^2 = 0 \Rightarrow (x^2 + a)(x^2 - a) = 0 \Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{-a}$ ou $x = \pm\sqrt{a}$.
Sendo a > 0, então $\sqrt{-a}$ não é um número real. Logo a equação $x^4 - a^2 = 0$ tem como raízes os números $-\sqrt{-a}$, $\sqrt{-a}$, $-\sqrt{a}$ e $\sqrt{a}$ dos quais apenas os dois últimos são reais.

Afirmativa **V**erdadeira.

Questão 02

Considerando-se a seqüência de números reais dada por $a_0 = 1$ e $a_n = \frac{2n^2+8}{17n}a_{n-1}$

Para $n \in N^*$, é correto afirmar:

(01) Todos os termos da seqüência são positivos.
(02) Para qualquer $n \in N$, a_n é um número racional.
(04) $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é uma progressão geométrica.
(08) Para , $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n > a_{n-1}$ se e somente se n > 8.
(16) Existe $n \in \mathbf{N}^*$, tal que $a_n = n\, a_{n-1}$.

□□

Resolução:

01) Verdadeiro pois para qualquer $n \in N^*$, $\frac{2n^2+8}{17n}a_{n-1}$ é um número positivo.

02) Verdadeiro pois para n = 0, a_0 = 1 e para n >0, o número $\frac{2n^2+8}{17n}a_{n-1}$ terá sempre o denominador diferente de zero.
04) Falso.
$a_0 = 1$ e $a_n = \frac{2n^2+8}{17n}a_{n-1}$ para $n \in N^*$,

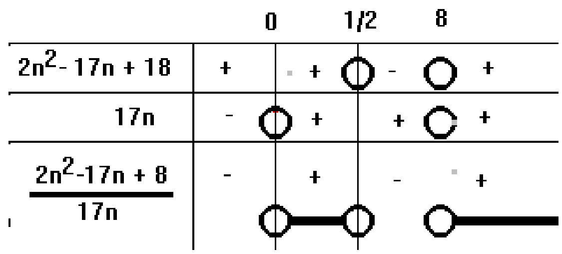
$a_o = 1$; $a_1 = \dfrac{2.1^2+8}{17.1}.1 = \dfrac{10}{17}$; $a_2 = \dfrac{2.2^2+8}{17.2}.\dfrac{10}{17} = \dfrac{80}{17^2}$; $a_3 = \dfrac{2.3^2+8}{17.3}.\dfrac{80}{17^2} = \dfrac{26.80}{3.17^3}$; .....

08)

$$\frac{2n^2+8}{17n}a_{n-1} > a_{n-1} \Rightarrow \frac{2n^2+8}{17n} > 1 \Rightarrow \frac{2n^2-17n+8}{17n} > 0$$

$2n^2 - 17n + 8 = 0$ $n = \dfrac{17 \pm \sqrt{289-64}}{4} = \dfrac{17 \pm 15}{4} \Rightarrow n = \dfrac{1}{2}$ ou $n = 8$.

$17n = 0 \Rightarrow n = 0$.



Verdadeiroporque pelo estudo dos sinais de $\dfrac{2n^2-17n+8}{17n}$ vemos que assume valores positivos para $n \in$ **N*** e $n > 8$.

16) Falso.

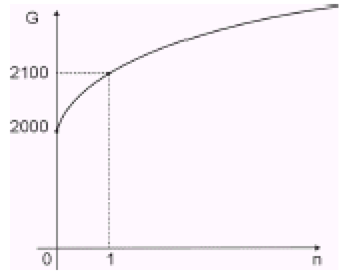
$$\frac{2n^2+8}{17n}a_{n-1} = n.a_{n-1} \Rightarrow \frac{2n^2+8}{17n} = n \Rightarrow -15n^2+8 = 0 \Rightarrow n = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} = \pm\frac{2\sqrt{30}}{15}$$

Questão 03

Considere um empréstimo de um capital de R$2 000,00 a uma taxa mensal de 10%. Nessas condições, é correto afirmar:

(01) Se for considerada a capitalização simples, o montante F(n), expresso em reais, ao final de n meses, será dado por F(n) = 2000 (1+10n).
(02) Ao final de dois meses, o valor dos juros na capitalização composta será igual a R$420,00.

(04) Na capitalização composta, o montante G, expresso em reais e dado em função do número n de meses, pode ser representado pelo gráfico ao lado.



(08) Se for considerada a capitalização composta, a seqüência dos montantes mensais será uma progressão geométrica de razão 1,1.

(16) Se a capitalização for composta, o capital dobrará de valor ao final de $\dfrac{\log 2}{\log 1{,}1}$ meses.

□□

Resolução:

(01) Falso porque:

$F(n) = 2\,000 + 2\,000 \times 0{,}1 \times n \Rightarrow F(n) = 2\,000\,(1 + 0{,}1n)$

(02) Verdadeiro.

$j = M - C \Rightarrow j = 2\,000\,(1{,}1)^2 - 2\,000 = 2\,420 - 2\,000 = 420.$

(04) Falso porque:
para $n = 1 \Rightarrow G = 2\,000 \,.\, 1{,}1 = 2\,200 \neq 2100$

(08) Verdadeiro:

$2000 \,.\, 1{,}1;\ 2000 \,.\, 1{,}1^2;\ 2000 \,.\, 1{,}1^3;......$

(16) Verdadeiro

$2000 \,.\, 1{,}1^n = 4000 \Rightarrow 1{,}1^n = 2 \Rightarrow \log(1{,}1^n) = \log 2 \Rightarrow n \,.\, \log 1{,}1 = \log 2 \Rightarrow n = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}1}$

meses

Questão 04

Considerando-se as funções f, g : **R** $\to$ **R**, tais que $f(x) = -3x^2 + \sqrt{3}\,x + 5$ e $g(x) = px + q$, sendo $p \in$ **R*** e $q \in$ **R** , é correto afirmar:

(01) A função f é crescente no intervalo $\left]-\infty, \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right]$.

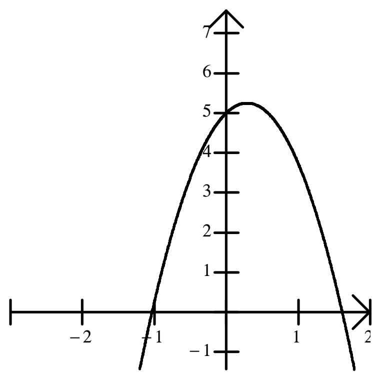
(02) Existe $p \in$ **R** tal que o gráfico da função h : **R** $\to$ **R**, dada por $h(x) = f(x) + g(x)$, é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, qualquer que seja $q \in$ **R** .

(04) Se a composta f $\circ$ g for uma função quadrática, seu gráfico terá concavidade voltada para cima.
(08) Existe p $\in$ **R*** tal que a função composta f $\circ$ g é inversível.
(16) $G_1 = g$, $G_2 = g \circ g$, $G_3 = g \circ g \circ g$, ... são funções afins, cujos coeficientes angulares formam uma progressão geométrica de razão p, e o coeficiente linear da função G_n é igual a $q\dfrac{p^n - 1}{p - 1}$

□□

Resolução:

(01) Verdadeiro.



f(x) é uma função do 2º grau com a = 3 > 0 e $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$ f é crescente no intervalo $\left]-\infty, \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right]$.

(02) Verdadeiro.
Sendo $h(x) = -3x^2 + \sqrt{3}x + 5 + px + q = -3x^2 + (\sqrt{3}+p)x + 5 + q$, para que seu gráfico seja simétrico em relação ao eixo das ordenadas é preciso que $\sqrt{3}+p = 0. \Rightarrow$
$p = -\sqrt{3}$

(04) Falso.
Sendo $f \circ g = -3(px + q)^2 + (px + q)\sqrt{3} + 5 = -3px^2 + (-6pq + p\sqrt{3})x - 3q^2 + \sqrt{3}q + 5$, seu gráfico terá concavidade voltada para cima se $-3p^2 > 0$ o que nunca acontecerá para qualquer valor real de p.

(08) Falso.
Para a função composta $f \circ g = -3p^2x^2 + (-6pq + p\sqrt{3})x - 3q^2 + \sqrt{3}q + 5$ ser inversível, $-3p = 0 \Rightarrow p = 0$.
(16) Verdadeiro.

$G_1 = px + q$, $G_2 = p(px + q) + q = p^2x + q(p+1)$; $G_3 = p[p^2x + q(p+1)]+q = p^3x + q(p^2+p+1)$; ..... são funções afins, cujos coeficientes angulares formam a PG: p, p^2, p^3, ...de razão p, e cujo coeficiente linear são da forma $q\dfrac{p^n - 1}{p - 1}$

Questão 05

Considerando-se, no plano cartesiano com origem O, os pontos A(5,0), B($5,-\sqrt{3}$) e C($-2, -2\sqrt{3}$) , é correto afirmar:

(01) O coeficiente angular da reta que passa por A e C é igual a $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

(02) A área do quadrilátero OABC é igual a $6\sqrt{3}$ u.a.

(04) Existe uma única função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos O, B e C.

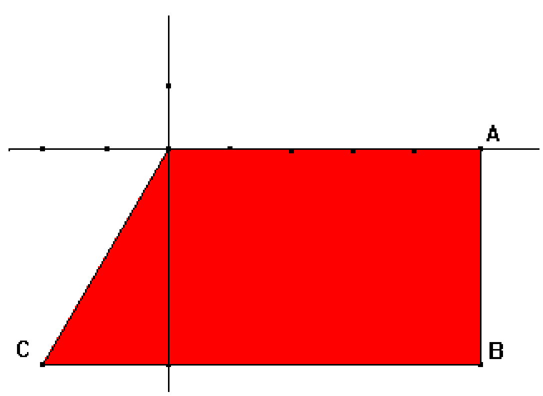
(08) O segmento obtido a partir do segmento OC, aplicando-se a rotação de 30° no sentido anti-horário em torno da origem, está contido no eixo das ordenadas.
(16) Os triângulos OCD e ABC são semelhantes, sendo D o ponto de interseção do segmento BC com o eixo das ordenadas.

Resolução:

01) Falso.
O coeficiente angular da reta que passa por A(5,0) e C($-2, -2\sqrt{3}$) é dado por

a = $\dfrac{0+2\sqrt{3}}{5+2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{7}$.

02)



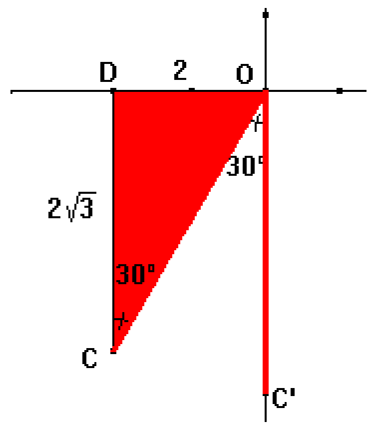
As bases do trapézio OABC medem AO = 5 e BC = 5 – (-2) = 7 e a altura $2\sqrt{3}$. Logo sua área é S = $\dfrac{(5+7)2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

04) Verdadeiro.
Determinação da função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos O(0,0) , B(5, $\sqrt{3}$ e C(□□ $\sqrt{3}$.

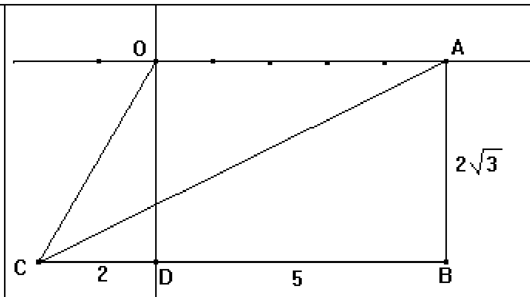
$$\begin{cases} 25a + 5b + c = -\sqrt{3} \\ 4a - 2b + c = -2\sqrt{3} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50a + 10b = -2\sqrt{3} \\ 20a - 10b = -10\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-6\sqrt{3}}{35} \\ b = \dfrac{23\sqrt{3}}{35} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{6\sqrt{3}}{35}x^2 + \frac{23\sqrt{3}}{35}x$$

08) Verdadeiro.
$\overline{CD} // \overline{OC'} \Rightarrow D\hat{C}O \cong C\hat{O}C'$ (ângulos alternos internos formados por duas paralelas e uma transversal).

$$tg(D\hat{C}O) = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow D\hat{C}O = C\hat{O}C' = 30°$$

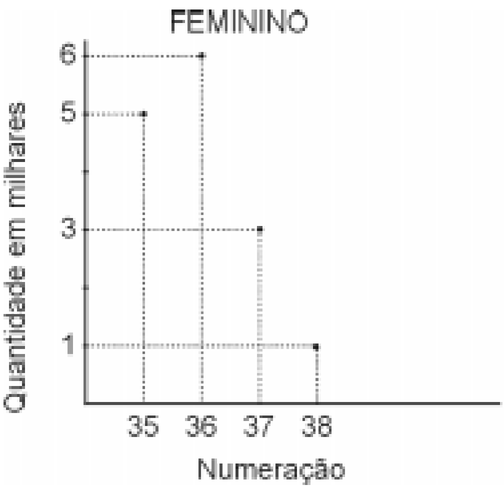


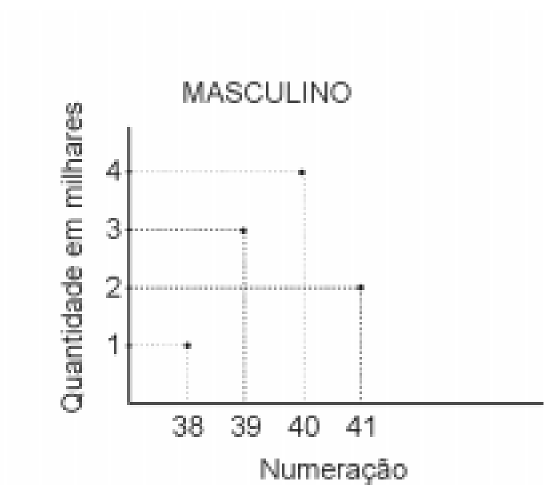
16) Falso.

<table>
<tr>
<td>Os dois triângulos são retângulos.
No triângulo ODC a tangente do menor ângulo agudo ($C\hat{O}D$) é $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ que é diferente da tangente do menor ângulo agudo ($A\hat{C}D$) do triângulo CBA que é $\dfrac{2\sqrt{3}}{7}$. Os triângulos não são semelhantes.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Questão 06

Uma empresa fabrica apenas dois modelos de sapato, sendo um feminino e o outro masculino. Os modelos femininos são fabricados nos números 35, 36, 37 e 38, e cada par é vendido por R$80,00. Os modelos masculinos são fabricados nos números 38, 39, 40 e 41, e o preço de venda de cada par é R$100,00. Os gráficos abaixo mostram as quantidades (em milhares de pares) produzidas e vendidas por mês pela fábrica.





Com base nessas informações, é correto afirmar:

(01) O preço de venda médio dos sapatos é igual a R$88,00.
(02) O preço de venda mediano dos sapatos é igual a R$80,00.
(04) A receita obtida com a venda de sapatos masculinos representa menos que 82% da receita correspondente ao modelo feminino.
(08) Se a venda do modelo feminino for reduzida em 20%, os dois modelos passarão a contribuir com o mesmo montante para a receita da empresa.
(16) Escolhendo-se ao acaso um par de sapatos, entre todos os produzidos em um mês, a probabilidade de que ele seja de número 38 ou do modelo feminino é igual a $\frac{16}{25}$
(32) Escolhendo-se ao acaso um par de sapatos de número 38, a probabilidade de que ele seja do modelo masculino é igual a $\frac{1}{10}$.

RESOLUÇÃO:

01) Verdadeiro.

P = $$\frac{[(1+3+5+6).80+(1+2+3+4).100].1000}{(1+3+5+6+1+2+3+4).1000} = \frac{1200+1000}{25} = \frac{2200}{25} = 88$$

02) Verdadeiro.

São 15000 modelos ao valor de R$80,00 e 10000 modelos ao preço de R$100,00

O elemento mediano é do de número $\frac{15000+10000+1}{2}=12500{,}5$

Logo o preço mediano é $\frac{P_{12500}+P_{12501}}{2}=\frac{80+80}{2}=80.$

04) Falso.

$]\frac{M}{F}=\frac{1000000}{1200000}=0{,}83.$

08) Falso.

0,80.1200000 = 960000.

16) Verdadeiro.

Quantidade de modelos femininos ou de número 38: 15000+ 1000 = 16000.

A probabilidade pedida é: $\frac{16000}{25000}=\frac{16}{25}.$

32) Falso.

$\frac{1000}{1000+1000}=\frac{1}{2}$

Questão 07

Considerando-se a matriz B = $\begin{pmatrix} u^2+\log v & 0 & u^2-\log v \\ 0 & 2^w & 0 \\ u^2-\log v & 0 & u^2+\log v \end{pmatrix}$, sendo u, w ∈ **R** e v ∈ $\mathbf{R}_+^*$,

é correto afirmar:

(01) A matriz B é simétrica, para quaisquer u,w ∈ **R**, v ∈ $\mathbf{R}_+^*$.

(02) O determinante de B é negativo se e somente se u ≠ 0 e v >1.

(04) Se u = 6, e v = 0,0001, então existe um único w ∈ **R** tal que os elementos da diagonal principal de B são medidas de um triângulo eqüilátero.

(08) Se u = 0, existem v ∈ $\mathbf{R}_+^*$ e w ∈ **R** tais que B^2 é uma matriz nula.

(16) Para qualquer $w \in \mathbf{R}$, o sistema de equações BX = 0 tem uma infinidade de soluções $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se e somente se v = 1.

RESOLUÇÃO:

01) Verdadeiro porque uma matriz quadrada é simétrica quando qualquer que seja $a_{i,j} = a_{j,i}$.

02) Falso.

$$\det B = \begin{vmatrix} u^2+\log v & 0 & u^2-\log v \\ 0 & 2^w & 0 \\ u^2-\log v & 0 & u^2+\log v \end{vmatrix} = 2^w\left[\left(u^2+\log v\right)^2-\left(u^2-\log v\right)^2\right]=$$

$$\left[2^w\left(u^2+\log v+u^2-\log v\right)\left(u^2+\log v - u^2+\log v\right)\right]=2^w\left(2u^2\right)\left(2\log v\right)=2^{w+2}u^2\log v\,.$$

Sendo $u \neq 0$ e v >1, o valor numérico de $\det B = 2^{w+2}u^2\log v$ será sempre positivo.

04) Verdadeiro.

$$\begin{pmatrix} 6^2+\log 10^{-4} & 0 & 6^2-\log 10^{-4} \\ 0 & 2^w & 0 \\ 6^2-\log 10^{-4} & 0 & 6^2+\log 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 40 \\ 0 & 2^w & 0 \\ 40 & 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

Se w = 5 então todos os termos da diagonal principal são iguais a 32.

08) Falso

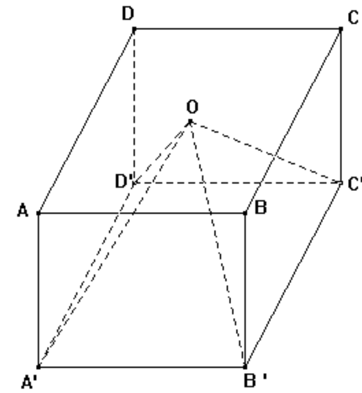
$$B^2 = \begin{pmatrix} \log v & 0 & \log v \\ 0 & 2^w & 0 \\ \log v & 0 & \log v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \log v & 0 & \log v \\ 0 & 2^w & 0 \\ \log v & 0 & \log v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\log^2 v & 0 & 2\log^2 v \\ 0 & 2^{2w} & 0 \\ 2\log^2 v & 0 & 2\log^2 v \end{pmatrix}$$

16) Falso.

Sendo B uma matriz não nula então para BX = 0 $\Rightarrow$ X = B'.0 $\Rightarrow$ X = 0.

Questão 08

Na figura, os quadrados ABCD e A’B’C’D’, cujos lados medem 10 u.c., são as bases de um prisma reto de altura igual a $5\sqrt{3}$ u.c., e o ponto O é, ao mesmo tempo, o centro do quadrado ABCD e o vértice da pirâmide com base A’B’C’D’.
A partir dessas informações, pode-se afirmar:



(01) Qualquer plano que contenha uma face lateral da pirâmide faz um ângulo de 60º com o plano da base A’B’C’D’.
(02) Qualquer aresta lateral da pirâmide faz um ângulo de 60º com o plano da base A’B’C’D’.
(04) Existem uma aresta da pirâmide que é coplanar ao segmento DD’ e uma aresta da pirâmide que está contida numa reta reversa à reta que contém DD’.
(08) A área do triângulo OC’D’ é igual a 50 u.a.
(16) O volume do sólido compreendido entre o prisma e a pirâmide é igual a $\frac{500\sqrt{3}}{3}$ u.v.

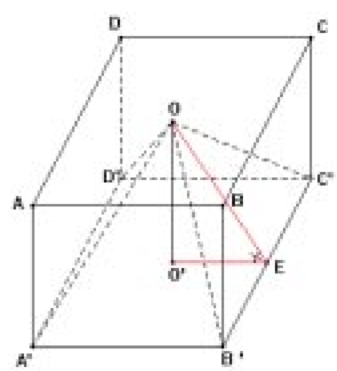
RESOLUÇÃO:

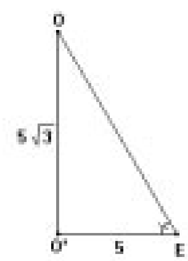
01) Verdadeiro.

OÔ’E é o ângulo formado por uma face

lateral da pirâmide e a face A’B’C’D’ do prisma.
Sendo o segmento O’E o apótema da base A’B’C’D’ então a sua medida é 5u.c.
No triângulo retângulo OO’E temos que

$$\text{tg}(O\hat{O}'E) = \frac{5\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow m(O\hat{O}'E) = 60°$$

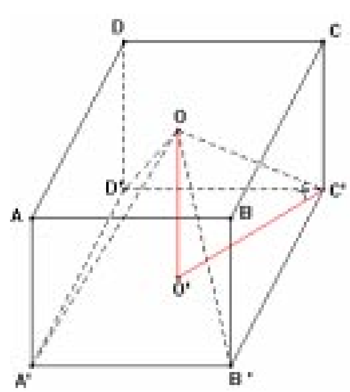


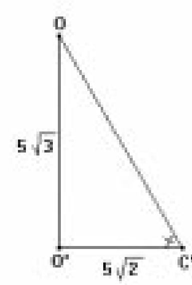


02) Falso.

OÔ’C’ é o ângulo formado por uma aresta lateral da pirâmide e a face A’B’C’D’ do prisma.
Sendo o segmento O’C’ o raio da base A’B’C’D’ (metade de sua diagonal) então a sua medida é $5\sqrt{2}$ u.c.
No triângulo retângulo OO’C’ temos que

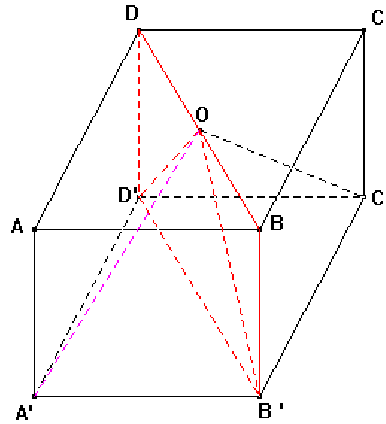
$$\text{tg}(O\hat{C}'E) = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow m(O\hat{C}'E) \neq 60°$$





04) Verdadeiro.

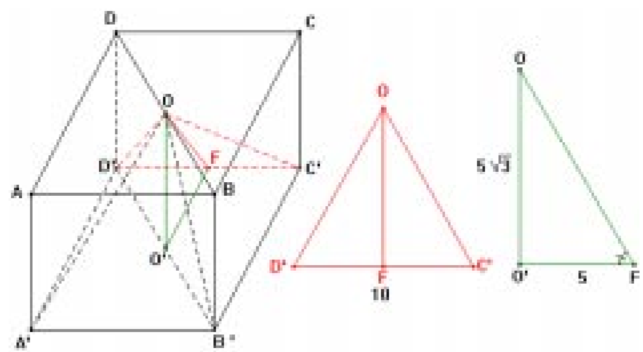
As arestas OD' e OB' são coplanares com o segmento DD' (estão contidos no plano BDB') e a aresta A'O está contida na reta A"O reversa à reta que contém DD'.



08) Verdadeiro.

No triângulo retângulo OO'F temos: $\text{OF}^2 = 75 + 25 \Rightarrow \text{OF} = 10$.

Logo a área do triângulo OD'C' é: $S = \dfrac{10.10}{2} = 50$



16) Falso.

Volume do paralelepípedo menos o volume da pirâmide:

$$10.10.5\sqrt{3} - \frac{10.10.5\sqrt{3}}{3} = \frac{1500\sqrt{3} - 500\sqrt{3}}{3} = \frac{1000\sqrt{3}}{3}$$

QUESTÕES 09 e 10

INSTRUÇÃO: Efetue os cálculos necessários e marque o resultado na Folha

Questão 09

Durante uma reunião, ocorreu uma divergência quanto à formação de uma comissão gestora, a ser escolhida entre os presentes. Um grupo defendia uma comissão com três membros, sendo um presidente, um vice-presidente e um secretário. Outro grupo queria uma comissão com três membros sem cargos definidos. A primeira alternativa oferece 280 possibilidades de escolha a mais que a segunda.
Determine o número de pessoas presentes à reunião, sabendo-se que esse número é maior que 5.

RESOLUÇÃO:

Consideremos que na reunião estavam **n** pessoas.
O número de possibilidades que o primeiro grupo defendia é $\mathbf{A_{n,3} = n(n-1)(n-2)}$ devido às funções que estavam sendo disputadas.

O número de possibilidades que o segundo grupo defendia é $\mathbf{C_{c,3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}}$.

Assim:

$$\mathbf{n(n-1)(n-2) - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 280.}$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n - \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} = 280 \Rightarrow 5n^3 - 15n^2 + 10n = 1680 \Rightarrow$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n = 336 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = (2.2.2).(2.3)7 = 8\,.\,7.6 \Rightarrow n = 8$$

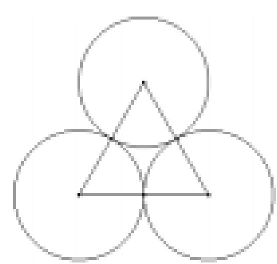
Resposta:

O número de pessoas presentes à reunião é 8.

Questão 10

Considere um triângulo eqüilátero cujos lados medem $2\left(\sqrt{3}-1\right)$u.c. e três circunferências com raios medindo $\left(\sqrt{3}-1\right)$– u.c., cada uma delas com centro em um vértice do triângulo, conforme a figura.
Considere então um segundo triângulo T satisfazendo as seguintes condições:
- as três circunferências estão contidas no interior do triângulo T;
- cada lado do triângulo T tangencia duas dessas circunferências;
- cada vértice do triângulo T pertence à mediatriz de um dos lados do triângulo inicial.

Com base nesses dados, determine, em u.c., o perímetro do triângulo T.



Resolução:

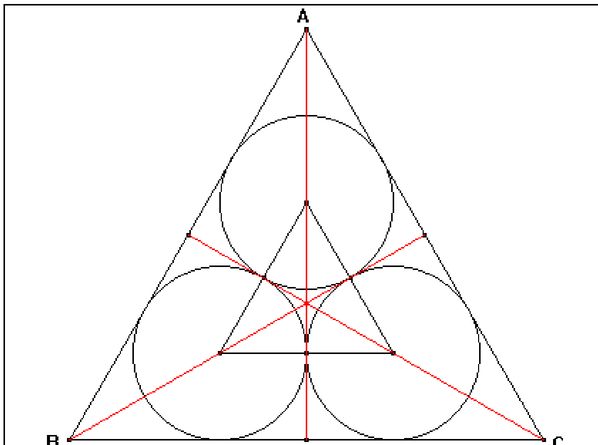


Figura I

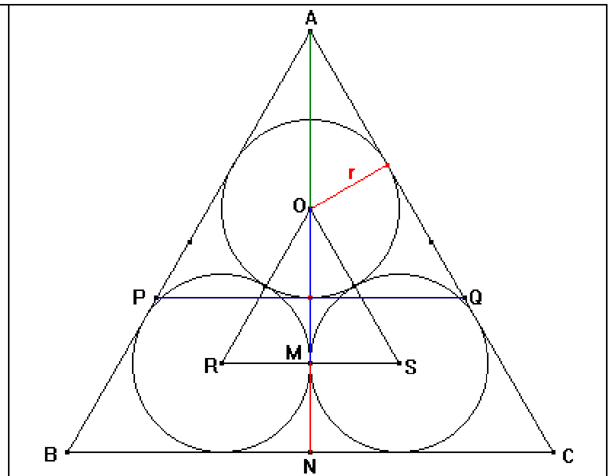


Figura II

O triângulo ABC foi construído segundo as condições estabelecidas para o triângulo T. A B e C são pontos das mediatrizes e cada um dos seus lados tangenciam duas das circunferências (figura 1).

Na figura 2 destacamos o triângulo eqüilátero PAQ circunscrito ao círculo de centro O então o segmento AO = 2r = $2\left(\sqrt{3}-1\right)$.

No triângulo ORS a altura OM = $\frac{l\sqrt{3}}{2}=\frac{\cancel{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}}{\cancel{2}}=3-\sqrt{3}$.

MN = r = $\left(\sqrt{3}-1\right)$.

No triângulo ABC, a altura AN = AO + OM + MN = $2\left(\sqrt{3}-1\right)$ + $3-\sqrt{3}$ + $\left(\sqrt{3}-1\right)$ = $2\sqrt{3}$.

AN = $\frac{BC\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC=\frac{2AN\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BC=\frac{2.2\sqrt{3}\sqrt{3}}{3}=4$.

RESPOSTA:

O perímetro do triângulo T é 12u.c.