

ESAMC Vestibular 2002_2.

M A T E M Á T I C A

Resolução e comentário – Profa. Maria Antônia Conceição Gouveia.

Questão 26

Para todo x real, seja $\text{Int}(x)$ o maior número inteiro que não supera x . Dessa forma, o valor de $y = \text{Int}(2,3) + \text{Int}(-3,4) - \text{Int}(-2)$ é :

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

RESOLUÇÃO:



Analisando a escala, temos: $2 + (-4) - (-2) = 0$.

Alternativa C.

Questão 27

Um número natural N tem 3 algarismos. Invertendo-se a ordem dos seus algarismos, obtemos um outro número de 3 algarismos com 792 unidades a menos que N . Pode-se afirmar que:

- A) O algarismo das unidades de N é 1
B) O algarismo das centenas de N é 8
C) O algarismo das unidades de N é 2
D) O algarismo das dezenas de N é 2
E) O algarismo das dezenas de N é 7

RESOLUÇÃO:

Como N tem três algarismos, que representaremos por: c , o das centenas, por d , o das dezenas e por u , o das unidades, temos:

$$N = 100c + 10d + u.$$

Invertendo a ordem dos algarismos, teremos um novo número $N' = 100u + 10d + c$.

$$\text{Pela segunda informação } N = N' + 792 \Rightarrow 100c + 10d + u = 100u + 10d + c + 792.$$

$$\Rightarrow 99c - 99u = 792 \Rightarrow 99(c - u) = 792 \Rightarrow c - u = 8.$$

Como $c \neq 0$ e seu maior valor é nove $\Rightarrow c = 9$ e $u = 1$.

Alternativa b.

Questão 28

Um capital de R\$ 10000,00 foi aplicado do seguinte modo: uma parte a juros simples de 6% ao mês e o restante a juros compostos de 4% ao mês. Depois de 3 meses, as duas aplicações tiveram o mesmo rendimento. A maior parte aplicada foi aproximadamente:

- A) R\$ 4100,00
- B) R\$ 7400,00
- C) R\$ 5900,00
- D) R\$ 8600,00
- E) R\$ 6300,00

RESOLUÇÃO:

Representemos por y , a parte aplicada a juros compostos e por $10000 - y$, a parte aplicada a juros simples. Como pela informação, os rendimentos das duas aplicações num período de três meses são iguais:

$$3 \times 0,06 \times y = (10000 - y)(1,04)^3 - (10000 - y) \Rightarrow 0,18y = (10000 - y)(1,124864) - (10000 - y)$$

$$0,18y = 0,124864(10000 - y) \Rightarrow 0,304864y = 1248,64 \Rightarrow y \cong 4095,73$$

$$10000 - 4095,73 = 5904,27.$$

Alternativa c.

Questão 29

A numeração das casas numa determinada rua forma uma PA. Somamos os números de 7 casas consecutivas num mesmo lado da rua e obtivemos 3584. Pode-se afirmar que:

- A) O número da primeira casa é 510
- B) O número da segunda casa é 511
- C) O número da primeira casa pode ser 510
- D) O número da terceira casa pode ser 512
- E) O número da quarta casa é 512

RESOLUÇÃO:

Consideremos que os números das casas são, respectivamente, $x - 3r$, $x - 2r$, $x - r$, x , $x + r$, $x + 2r$ e $x + 3r$.

A soma destes 7 números é $7x = 3584$. $\Rightarrow x = 512$.

Como o quarto termo é x , o seu valor é 512.

Alternativa e.

Questão 30

Um dado de 6 faces numeradas de 1 a 6 é viciado, de modo que a probabilidade de ocorrer uma face par é o dobro da probabilidade de ocorrer uma face ímpar. Desse modo, a probabilidade de ocorrer a face de número 5, quando se joga o dado uma vez é :

- A) $1/3$ B) $1/2$ C) $1/4$ D) $1/6$ E) $1/9$

RESOLUÇÃO:

As faces do dado são 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Sendo o dado viciado e a probabilidade de ocorrer uma face par é o dobro da probabilidade da face ímpar, podemos considerar que o espaço amostral é $\{1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6\}$.

Assim o $n(E) = 9$ e $n(A) = 1 \Rightarrow p(A) = \frac{1}{9}$

Alternativa e.

Questão 31

As raízes da equação $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$

- A) São duas, sendo uma o dobro da outra
B) São duas, sendo uma o quádruplo da outra
C) São três e formam uma PA de razão $1/2$
D) São três e formam uma PG de razão 2
E) São três e não formam PA nem PG

RESOLUÇÃO:

Resolvendo a equação: $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{4} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{9 \pm 1}{4} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{5}{2} \text{ ou } \left(x + \frac{1}{x}\right) = 2.$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ ou } x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Resolvendo estas equações, vem:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 1.$$

As raízes $\frac{1}{2}$, 1 e 2 formam uma PG de razão 2.

Alternativa d.

Questão 32

Quantos algarismos tem o número $n = 2^{2002}$? Dado $\log 2 = 0,301$

- A) 430 B) 523 C) 603 D) 712 E) 753

RESOLUÇÃO:

Sendo $n = 2^{2002} \Rightarrow$

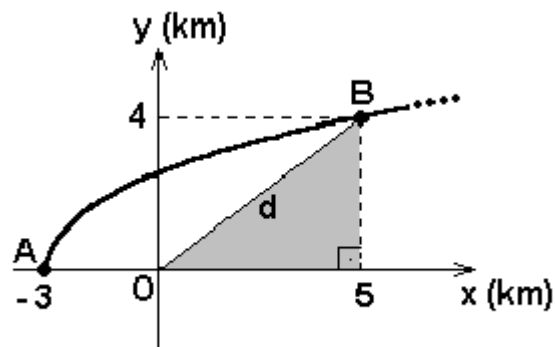
$$\log n = \log 2^{2002} \Rightarrow \log n = 2002 \times \log 2 \Rightarrow \log n = 2002 \times 0,301 \Rightarrow \log n = 602,602 .$$

Como a característica deste logaritmo é 602, então o número de algarismos de n é $602 + 1 = 603$.

Alternativa c.

Questão 33

Um míssil é lançado do ponto A, a 3 km da origem O e descreve uma trajetória parabólica dada pela equação $y = \sqrt{2x+6}$, com $x \geq -3$, como mostra a figura abaixo. O teorema de Pitágoras permite calcular a distância de cada ponto da trajetória até a origem (Por exemplo, o ponto B encontra-se a $\sqrt{41}$ km da origem). A menor de todas essas distâncias é de :



- A) $\sqrt{5}$ km B) $\sqrt{6}$ km C) $\sqrt{7}$ km D) $\sqrt{8}$ km E) 3 km

RESOLUÇÃO:

Consideremos o ponto (x,y) um ponto genérico da função. A sua distância à origem dos eixos é $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como $y = \sqrt{2x + 6} \Rightarrow y^2 = 2x + 6 \Rightarrow d = \sqrt{x^2 + 2x + 6}$.

Sendo $d = \sqrt{x^2 + 2x + 6}$, d assumirá valor mínimo quando o radicando $x^2 + 2x + 6$ também assumir valor mínimo, ou seja o valor $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(4 - 24)}{4} = 5$.

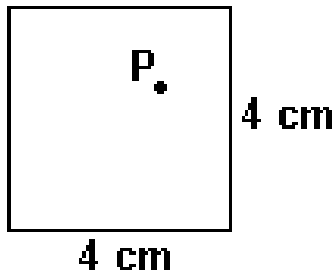
Assim o valor mínimo de d é $\sqrt{5}$.

Alternativa a.

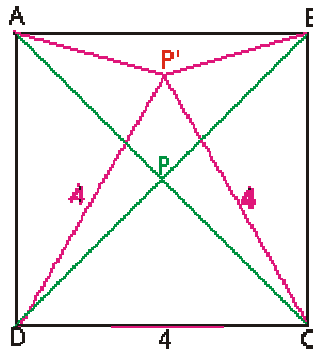
Questão 34

P é um ponto qualquer no interior do quadrado abaixo. A soma das distâncias de **P** aos quatro vértices do quadrado pode ser igual a :

- A) 8 cm B) 9 cm C) 10 cm D) 11 cm E) 12 cm



RESOLUÇÃO:



Como P é um ponto interno qualquer em relação ao quadrado, vamos considerá-lo como a interseção das diagonais. Sendo este ponto o médio das duas diagonais, a sua distância a cada vértice é $2\sqrt{2}$ cm. Logo a soma de suas distâncias aos quatro vértices é $8\sqrt{2}$ cm, que aproximadamente equivale 11,31 cm.

Considerando o ponto interno P como o vértice do triângulo equilátero construído tendo como lado um dos lados do quadrado. o triângulo ADP' é isósceles e seu ângulo do vértice é 30°. Pela lei dos cossenos encontramos que AP' mede

$\sqrt{32 - 16\sqrt{3}} = \sqrt{32 - 27,68} = \sqrt{4,32} = 2,08$, assim a soma das distâncias será aproximadamente 12,06.

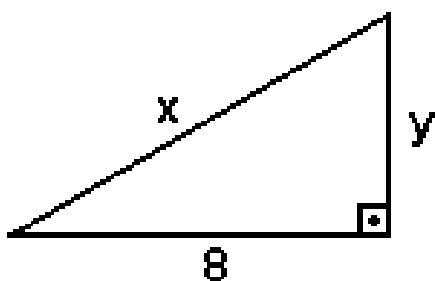
Logo o único valor do apresentados que a soma das distâncias pode assumir é 12.

Alternativa e.

Questão 35

No triângulo retângulo abaixo, as medidas x e y são dadas por números naturais. A soma dos possíveis valores de x é :

- A) 10 B) 18 C) 27 D) 36 E) 42.



RESOLUÇÃO:

Pelo teorema de Pitágoras temos $x^2 = y^2 + 64 \Rightarrow x^2 - 64 = y^2 \Rightarrow (x - 8)(x + 8) = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{(x - 8)(x + 8)}$

Como x e y representam as medidas dos lados de um triângulo, têm que ser números positivos e como $x - 8 > 0 \Rightarrow x > 8$. Lembrando que pela situação- problema os valores de x e y devem ser inteiros.

Atribuindo a x possíveis valores inteiros:

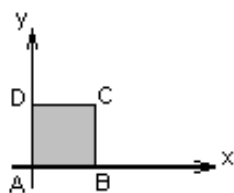
| x | $y = \sqrt{(x - 8)(x + 8)}$ |
|-----------|--|
| 9 | $y = \sqrt{17}$ |
| 10 | $y = \sqrt{36} = \mathbf{6}$ |
| 11 | $y = \sqrt{57}$ |
| 12 | $y = \sqrt{80}$ |
| ... | ... |
| 17 | $y = \sqrt{9 \times 25} = \mathbf{15}$ |

Logo a soma dos possíveis valores de x é $10 + 17 = 27$.

Alternativa c.

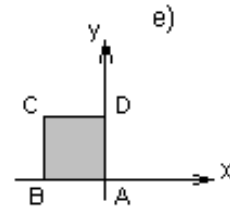
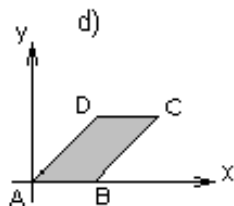
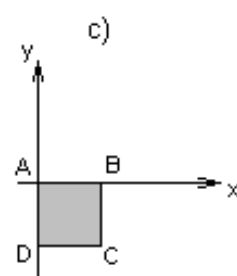
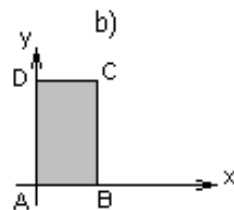
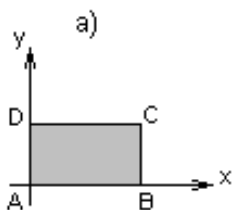
Questão 36

A figura ao lado mostra um quadrado ABCD representado no plano cartesiano. As linhas da matriz M são as coordenadas dos vértices do quadrado. Multiplicando-se a matriz M pela matriz de transformação T dada, obtém-se uma matriz N. Assinale a alternativa que mostra a figura representada pela matriz N.



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$



RESOLUÇÃO:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Alternativa d.

Questão 37

O valor de x na equação $\frac{x-a}{a+b} - \frac{x-a}{a} = \frac{b}{a}$ com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a \neq -b$ é :

- A) $-b$ B) $-a$ C) $a+b$ D) b E) a

RESOLUÇÃO:

$\frac{x-a}{a+b} - \frac{x-a}{a} = \frac{b}{a} \Rightarrow$ Multiplicando todos os termos da equação pelo **m.m.c.** entre seus denominadores:

$$a(a+b)\left(\frac{x-a}{a+b}\right) - a(a+b)\left(\frac{x-a}{a}\right) = a(a+b)\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow a(x-a) - (a+b)(x-a) = b(a+b)$$

$$[a - (a+b)](x-a) = b(a+b) \Rightarrow -b(x-a) = b(a+b) \Rightarrow x-a = -(a+b) \Rightarrow x = -b.$$

Alternativa a.

Questão 38

Considere o polinômio $P(x) = x.(5x + 12)$. Qual dos polinômios abaixo deve ser somado ao $P(x)$ para que ele se torne um quadrado perfeito para qualquer x ?

- A) $(x-1)^2$
B) $(x-1).(x+1)$
C) $(1+x).(1-x)$
D) $(x+3).(x-3)$
E) $(3+x).(3-x)$

RESOLUÇÃO:

$$P(x) = x.(5x + 12) \Rightarrow P(x) = 5x^2 + 12x \Rightarrow$$

Testando uma a uma cada alternativa, vemos que o polinômio que deverá ser somado a $P(x)$ para que tenhamos um trinômio quadrado perfeito é o da alternativa e:

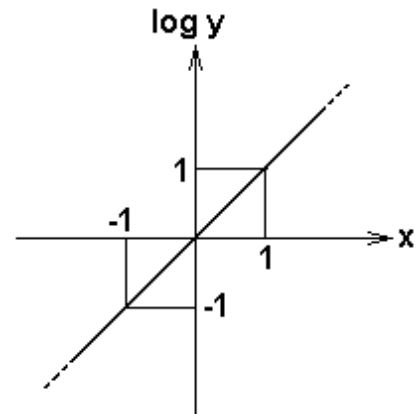
$$P(x) + (3+x)(3-x) = 5x^2 + 12x + 9 - x^2 = 4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2.$$

Alternativa e.

Questão 39

O gráfico ao lado representa a função :

- A) $y = 10^x$
- B) $y = 10x$
- C) $y = x$
- D) $y = \log x$
- E) $y = x^{10}$



RESOLUÇÃO:

O gráfico estudado é o gráfico de $f(y) = \log y$.

Fazendo $y = 10^x$, verificamos se o gráfico satisfaz à função $f(10^x) = \log y$

Se $x = 1 \Rightarrow f(10) = 1$ **Verdadeiro**.

Se $x = 0 \Rightarrow f(1) = 0$ **Verdadeiro**.

Se $x = -1 \Rightarrow f(-1) = \log(0,1) = -1$. **Verdadeiro**.

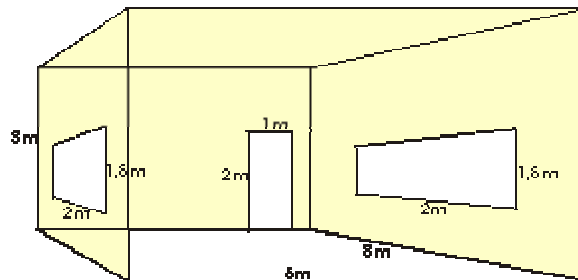
Alternativa a.

Questão 40

Uma sala tem 8m de comprimento, 6m de largura e 3m de altura e possui uma porta de 1m x 2m e duas janelas de 2m x 1,5m. Essa sala terá suas paredes internas e seu teto pintados com duas demãos de tinta. Segundo o fabricante, o rendimento da tinta é de 8 m² por litro na primeira demão e 12,4 m² por litro na segunda demão. Quantos litros de tinta serão utilizados ?

- A) 12,8
- B) 15,6
- C) 18,0
- D) 20,6
- E) 25,5

RESOLUÇÃO:



Serão pintados: o teto, as duas paredes laterais, a parede do fundo, a parede da frente

$$S = 6 \times 8 + 2 \times 3 \times 8 + 2 \times 6 \times 3 - 2 \times 2 \times 1,5 - 2 \times 1 = 48 + 48 + 36 - 6 - 2 = 124.$$

Litros gastos na 1ª demão : $124 : 8 = 15,5$ litros.

Litros gastos na 2ª demão : $124 : 12,4 = 10$ litros.

$$10 + 15,5 = 25,5 \text{ litros.}$$

Alternativa e.

Questão 41

A equação $x \cdot 2^x = 1$:

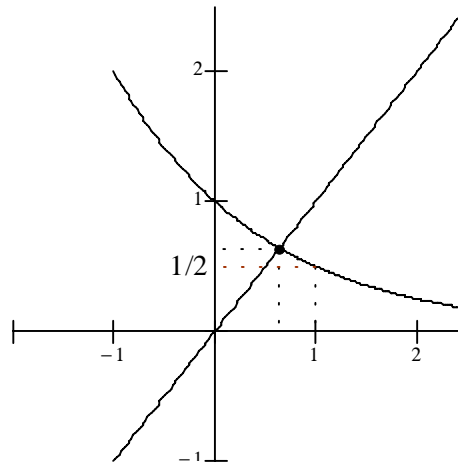
- A) Tem uma única raiz real entre 0 e 1/2.
- B) Tem uma única raiz real entre 1/2 e 1
- C) Tem duas raízes reais de mesmo sinal
- D) Tem duas raízes reais menores que 1
- E) Não tem nenhuma raiz real

RESOLUÇÃO:

Sendo $x \cdot 2^x = 1 \Rightarrow$ que $x = (2^x)^{-1} \Rightarrow x = (2^{-x})$.

Consideremos as funções $f(x) = x$ e $g(x) = (2^{-x})$.

Seus gráficos :



$$I - g(1) = \frac{1}{2} \text{ e } f(1) = 1 \Rightarrow g(1) < f(1).$$

II - $g(0) = 1$ e $f(0) = 0 \Rightarrow g(0) > f(0) \Rightarrow$ de **I** e **II** e pela análise do gráfico concluímos que Existe uma única solução entre 1/2 e 1.

Alternativa b.

Questão 42

Permutando-se de todas as maneiras os elementos da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, obtêm-se x matrizes diferentes e y determinantes diferentes. O valor de $x + y$ é :

- A) 24 B) 25 C) 27 D) 30 E) 36

RESOLUÇÃO:

O número total de matrizes diferentes de ordem 2 que podem ser formadas com os valores 1,2,3 e 4 é dado por $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. $\Rightarrow x = 24$.

Os possíveis determinantes diferentes são:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10; \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1.$$

Permutando as colunas dos três determinantes encontraremos os valores **2**, **10** e **1**.

Logo são 6 determinantes diferentes. $\Rightarrow y = 6$.

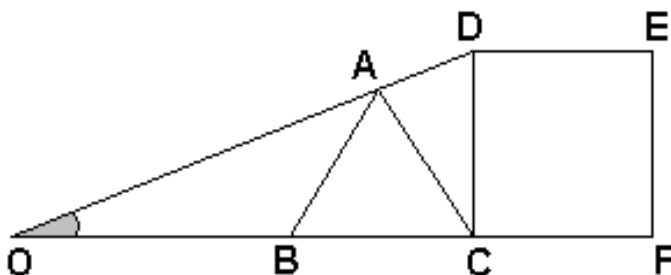
Então $x + y = 24 + 6 = 30$.

Alternativa d.

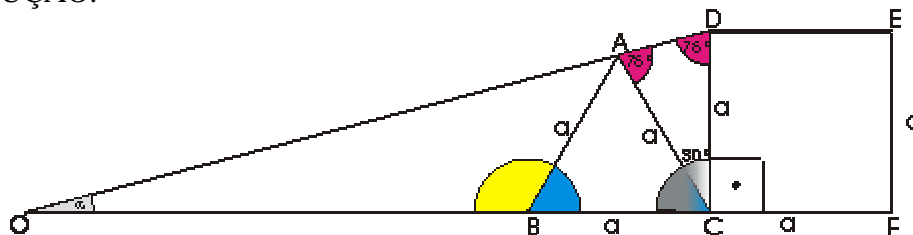
Questão 43

Na figura, o triângulo equilátero ABC e o quadrado CDEF têm todos os lados iguais. Se os pontos O, A e D estão alinhados, o ângulo AÔB mede :

- A) 10° B) 15° C) 20° D) 25° E) 30°



RESOLUÇÃO:



Na figura o triângulo ACD é isósceles com o ângulo $\hat{A}CD = 30^\circ \Rightarrow \hat{A}DC = 75^\circ$.
Então no triângulo retângulo DCO o ângulo $\hat{D}OC$ mede 15° .

Alternativa b.

Questão 44

O número $510511 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1$ é :

- A) Composto
- B) Múltiplo de 11
- C) Múltiplo de 13
- D) Múltiplo de 17
- E) Primo

RESOLUÇÃO:

O número $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17)$ é múltiplo de 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17, logo seu consecutivo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1$ não pode ser múltiplo de 11, de 13 ou de 17..

Um dos processos para verificar se um número é primo ou não, é dividi-lo sucessivamente pela seqüência dos números primos e constatar, sobrando resto, se o quociente é menor que o divisor, concluímos que ele é primo.

Efetuada a divisão $510511 : 19$ encontramos quociente 26869 e resto).

Então o número 510511 é composto pois é múltiplo de 19.

Alternativa a.

Questão 45

Uma conta seria dividida em partes iguais entre um certo número de pessoas, mas como uma delas esqueceu a carteira, cada uma das outras teve que dar R\$ 1,00 a mais e mesmo assim faltou R\$ 1,00 para completar a conta. Dentre os valores apresentados abaixo, assinale um possível valor para essa conta.

- A) R\$ 165,00 B) R\$ 185,00 C) R\$ 225,00 D) R\$ 245,00 E) R\$ 265,00

RESOLUÇÃO:

Seja n o número de pessoas e x o valor da conta a ser paga. Cada pessoa deveria

contribuir com $\frac{x}{n}$.

Como uma das pessoas esqueceu a carteira, sua cota foi rateada entre as $x-1$ pessoas

restantes e ainda faltou R\$ 1,00, então cada pessoa pagou $\frac{x-1}{n-1}$.

Equacionando:

$\frac{x}{n} + 1 = \frac{x-1}{n-1} \Rightarrow nx - x + n^2 - n = nx - n \Rightarrow x = n^2. \Rightarrow x$ é um quadrado perfeito. O único valor das alternativas que satisfaz a esta condição é 225.

Alternativa d.