PROVA DE MATEMÁTICA _ VESTIBULAR DA FUVEST- 2005 _ FASE 1

RESOLUÇÃO: Professora MARIA ANTONIA CONCEIÇÃO GOUVEIA

01) Um supermercado adquiriu detergentes nos aromas limão e coco. A compra foi entregue, embalada em 10 caixas, com 24 frascos em cada caixa. Sabendo-se que cada caixa continha 2 frascos de detergentes a mais no aroma limão do que no aroma coco, o número de frascos entregues, no aroma limão, foi

a) 110 b) 120 c) 130 d) 140 e) 150

RESOLUÇÃO:

- Detergentes por caixa: x de aroma limão e x-2 de aroma coco.
- Como cada caixa contém 24 frascos: $x + x - 2 = 24 \Rightarrow 2x = 26 \Rightarrow x = 13$
- A compra foi entregue, embalada em 10 caixas, logo, o total de frascos no aroma limão foi de $13 \cdot 10 = 130$.

RESPOSTA: c

02) O menor número inteiro positivo que devemos adicionar a 987 para que a soma seja o quadrado de um número inteiro positivo é

a) 37 b) 36 c) 35 d) 34 e) 33

RESOLUÇÃO:

- O número 987 é tal que: $31^2 < 987 < 32^2$.
- Como a questão pede o menor número inteiro positivo que devemos adicionar a 987 para que a soma seja o quadrado de um número inteiro positivo, este número é $1024 - 987 = 37$.

RESPOSTA: a

03) O Sr. Reginaldo tem dois filhos, nascidos respectivamente em 1/1/2000 e 1/1/2004. Em testamento, ele estipulou que sua fortuna deve ser dividida entre os dois filhos, de tal forma que:

(1) os valores sejam proporcionais às idades;
(2) o filho mais novo receba, pelo menos, 75% do valor que o mais velho receber.
O primeiro dia no qual o testamento poderá ser cumprido é:

a) 1/1/2013 b) 1/1/2014 c) 1/1/2015 d) 1/1/2016 e) 1/1/2017

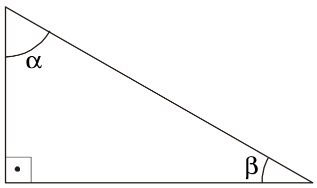
RESOLUÇÃO:

	idade	$
Filho mais velho	x anos	kx
Filho mais novo	y anos	$ky \geq 0{,}75kx \Rightarrow y \geq 0{,}75x$

- Pelos dados do problema vemos que $x > 4$, $x = y + 4$ e $y \geq 0{,}75x \Rightarrow \frac{y}{x} \geq \frac{3}{4}$.
- A classe de equivalência da fração $\frac{3}{4}$ é dada pelo conjunto:
- $\left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, ,,,\right\}$ no qual o primeiro elemento da forma $\frac{y}{x}$ que satisfaz às condições: $x > 4$, $x = y + 4$ e $y \geq 0{,}75x$ é $\frac{12}{16}$.
- Então o primeiro dia no qual o testamento poderá ser aberto é naquele em que os filhos completarem 16 e 12 anos, respectivamente. Ou seja no dia 1/1/2016

RESPOSTA: d

04) Sabe-se que x = 1 é raiz da equação $(\cos^2 \alpha)x^2 - (4\cos \alpha \text{ sen } ß)x + \frac{3}{2}\text{sen } ß = 0$, sendo α e ß os ângulos agudos indicados no triângulo retângulo da figura abaixo.



Pode-se então afirmar que as medidas de α e ß são, respectivamente,

a) $\frac{\pi}{8}$ e $\frac{3\pi}{8}$ b) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{3\pi}{8}$ e $\frac{\pi}{8}$

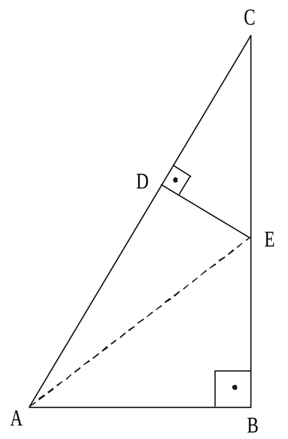
RESOLUÇÃO:

- Como α e β são as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, então $\cos \alpha = \text{sen } \beta$ e $\text{sen } \alpha = \cos \beta$.

- De $(\cos^2 \alpha)x^2 - 4(\cos \alpha \text{ sen } ß)x + \frac{3}{2}\text{sen } ß = 0$, temos:
- $2(\cos^2 \alpha)x^2 - 8(\cos \alpha \ \cos \alpha)x + 3\cos \alpha = 0 \Rightarrow$
- $2(\cos^2 \alpha)x^2 - 8(\cos^2 \alpha)x + 3\cos \alpha = 0 \Rightarrow 2(\cos \alpha)x^2 - 8(\cos \alpha)x + 3 = 0$ com $\cos \alpha \neq 0$ por que $\alpha \neq 90°$
- Sendo x = 1 raiz da equação, então: $2(\cos \alpha) - 8(\cos \alpha) + 3 = 0 \Rightarrow$
- $-6(\cos \alpha) + 3 = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ e $\beta = \frac{\pi}{6}$.

RESPOSTA: d.

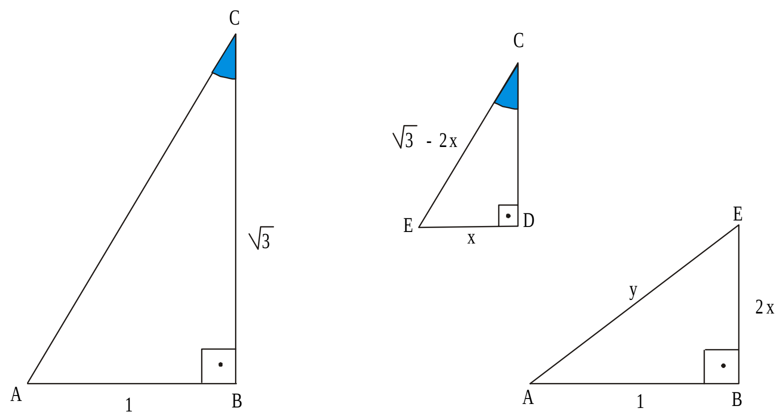
05) Na figura, ABC e CDE são triângulos retângulos, AB = 1, BC = $\sqrt{3}$ e BE = 2DE.



Logo, a medida de $\overline{AE}$ é

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

RESOLUÇÃO:

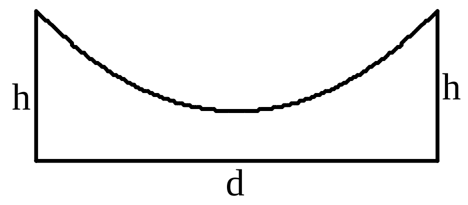


- Na figura acima foram destacados os triângulos retângulos, ABC e EDC (que são semelhantes) e o triângulo, também retângulo, ABE.
- Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC : AC = $\sqrt{3+1} = 2$
- Devido a semelhança dos triângulos ABC e EDC: $\dfrac{AC}{EC} = \dfrac{AB}{ED} \Rightarrow$

  $\dfrac{2}{\sqrt{3}-2x} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow 2x = \sqrt{3} - 2x \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABE : AE = $\sqrt{\dfrac{3}{4}+1} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

RESPOSTA: c

06) Suponha que um fio suspenso entre duas colunas de mesma altura h, situadas à distância d (ver figura), assuma a forma de uma parábola.



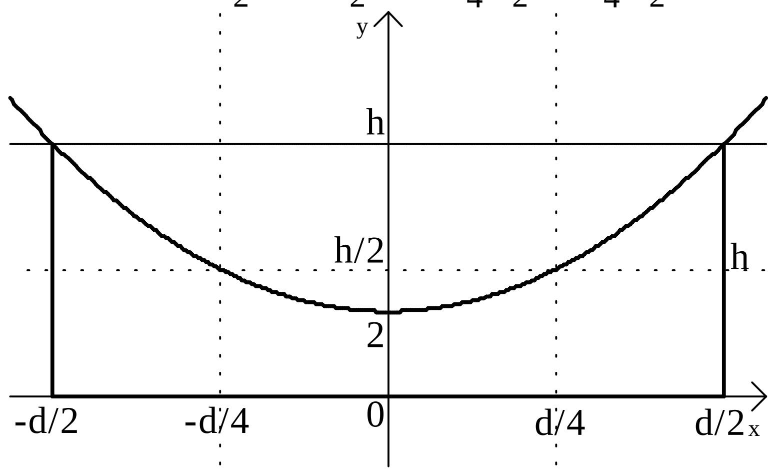
Suponha também que.
(i) a altura mínima do fio ao solo seja igual a 2;
(ii) a altura do fio sobre um ponto no solo que dista $\frac{d}{4}$ de uma das colunas seja igual a $\frac{h}{2}$

Se $h = 3.\frac{d}{8}$,então d vale

a) 14 b) 16 c) 18 d) 20 e) 22

RESOLUÇÃO:

- Consideremos a parábola que tem como eixo de simetria a reta x =0, passando pelos pontos $(-\frac{d}{2}, h)$, $(\frac{d}{2}, h)$, $(\frac{d}{4}, \frac{h}{2})$, $(-\frac{d}{4}, \frac{h}{2})$ e (0,2).



- A equação da parábola é do tipo $y = ax^2+2$.

- Pelo gráfico temos: $\begin{cases} \dfrac{ad^2}{16}+2=\dfrac{h}{2} \\ \dfrac{ad^2}{4}+2=h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ad^2+32=8h \\ ad^2+8=4h \end{cases} \Rightarrow 4h = 24 \Rightarrow h = 6$.
- Sendo h = $3.\dfrac{d}{8}$, então $3.\dfrac{d}{8} = 6 \Rightarrow d = 16$.

RESPOSTA: b.

07) Participam de um torneio de voleibol, 20 times distribuídos em 4 chaves, de 5 times cada.
Na 1ª- fase do torneio, os times jogam entre si uma única vez (um único turno), todos contra todos em cada chave, sendo que os 2 melhores de cada chave passam para a 2ª- fase.
Na 2ª- fase, os jogos são eliminatórios; depois de cada partida, apenas o vencedor permanece no torneio. Logo, o número de jogos necessários até que se apure o campeão do torneio é
a) 39 b) 41 c) 43 d) 45 e) 47

RESOLUÇÃO:

- Cada chave terá 5 times que jogam entre si uma única vez, logo o total de jogos na primeira fase será: $4.C_5^2 = \dfrac{4.5.4}{2}$ = **40**.
- Para a segunda fase passarão 8 times.Como os jogos são eliminatórios, e depois de cada partida, apenas o vencedor permanece no torneio, o total de jogos nesta fase será a metade de 8, ou seja **4**.

- Na fase semifinal, cujos jogos são também eliminatórios, teremos **2** jogos.

- Na fase final apenas **1** jogo.

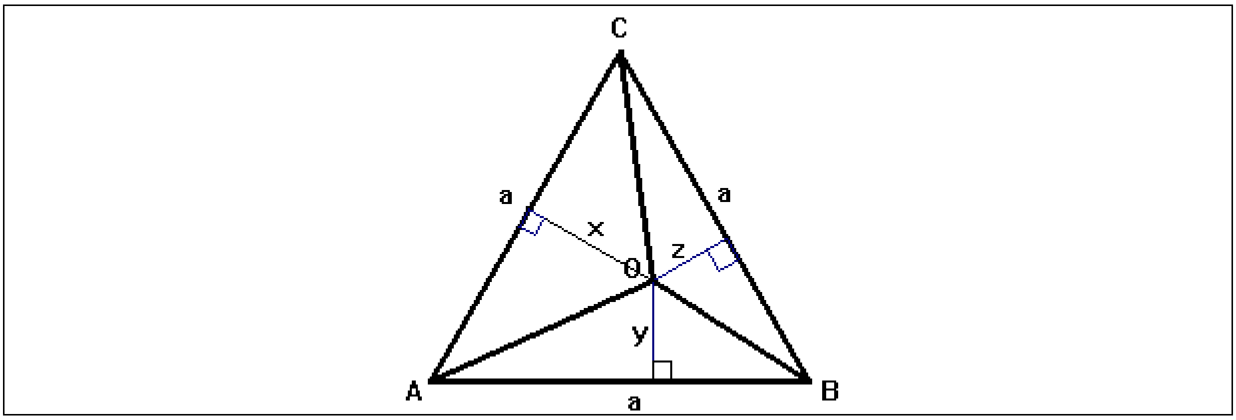
- Um total, então de 40+4+2+1 = 47 jogos.

RESPOSTA: e

08) A soma das distâncias de um ponto interior de um triângulo eqüilátero aos seus lados é 9. Assim, a medida do lado do triângulo é

a) $5\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{3}$ c) $7\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{3}$ e) $9\sqrt{3}$

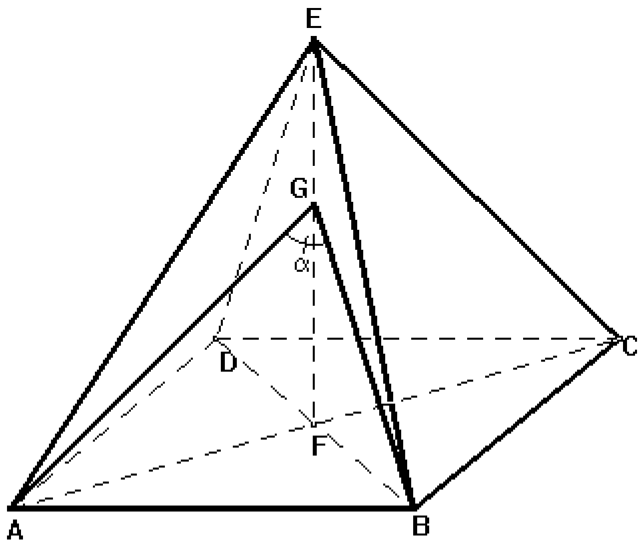
RESOLUÇÃO:



- Seja O o ponto interior ao triângulo eqüilátero ABC. E sejam x, y e z as distâncias deste ponto aos lados AC, AB e BC.
- Pela informação do problema, x+y+z = 9.
- A área do triângulo ABC é igual à soma das áreas dos triângulos AOB, AOC e BOC. Logo: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{ax}{2}+\frac{ay}{2}+\frac{az}{2} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{(x+y+z)}{2} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{9}{2}$ $\Rightarrow$ a = $6\sqrt{3}$

RESPOSTA: b

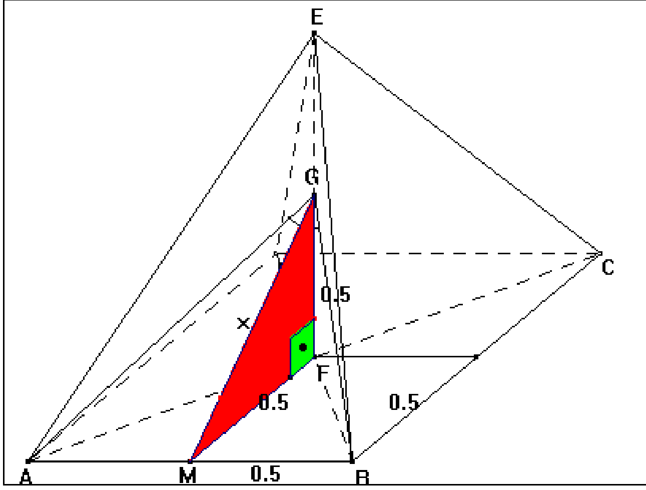
09) A figura abaixo mostra uma pirâmide reta de base quadrangular ABCD de lado 1 e altura EF = 1.



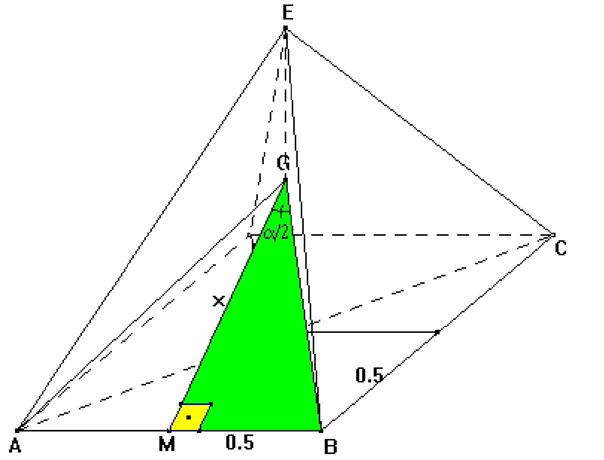
Sendo G o ponto médio da altura $\overline{\mathrm{EF}}$ e α a medida do ângulo $A\hat{G}B$, então $\cos\alpha$ vale

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

RESOLUÇÃO:



- Na figura ao lado o triângulo MFG é retângulo e isósceles, pois MF = FG = 0,5, logo MG = $0{,}5\sqrt{2}$



- Sendo o triângulo AEB, isósceles, então o segmento GM é bissetriz do ângulo $A\hat{G}B = \alpha$.
- O triângulo MBG nos leva a concluir que $\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{0{,}5}{0{,}5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Como $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1 = \sec^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$,

$\sec^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow \sec\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow$

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ e $\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos\left(2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$

$\cos\alpha = \frac{6}{9} - \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

RESPOSTA: b

10) Os pontos D e E pertencem ao gráfico da função $y = \log_a x$, com a >1 (figura abaixo).
Suponha que B = (x, 0), C = (x + 1, 0) e A = (x – 1, 0). Então, o valor de x, para o qual a área do trapézio BCDE é o triplo da área do triângulo ABE, é

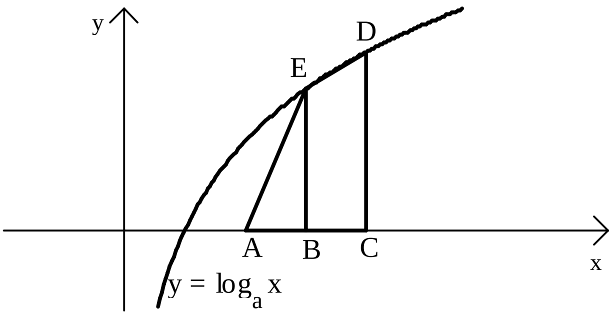
a) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $1+\frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{1}{2}+\sqrt{5}$

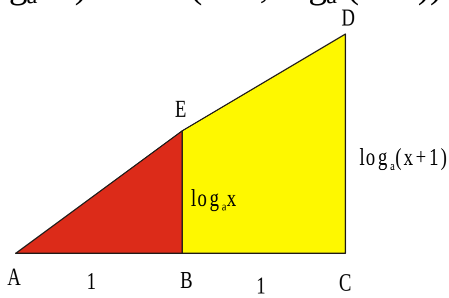
d) $1+\sqrt{5}$

e) $\frac{1}{2}+2\sqrt{5}$



RESOLUÇÃO:

- Como os pontos D e E pertencem ao gráfico da função $y = \log_a x$, com a >1, então E = (x, $\log_a x$) e D = (x+1, $\log_a (x+1)$).



- Pelos dados do problema: $\frac{(BE+CD)BC}{2}=3.\left(\frac{AB.BE}{2}\right) \Rightarrow$

$\frac{[\log_a x+\log_a (x+1)].1}{\cancel{2}}=3.\left(\frac{1.\log_a x}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow \log_a [x(x+1)]=3\log_a x$ que só tem solução para x > 0.

- Continuando: $\log_a [x(x+1)]=\log_a x^3 \Rightarrow x^2+x = x^3 \Rightarrow x^3 - x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0$ (não pertence ao domínio da função) ou $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (não pertence ao domínio da função) ou $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (solução da questão).

RESPOSTA: a

11) Sejam a e b números reais tais que:

(i) a, b e a + b formam, nessa ordem, uma PA;
(ii) 2^a , 16 e 2^b formam, nessa ordem, uma PG.

Então o valor de a é

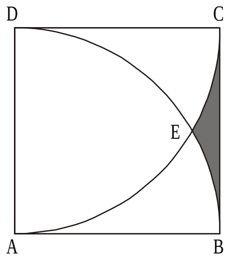
a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{8}{3}$

RESOLUÇÃO:

- $\begin{cases} a+a+b=2b \\ 2^a.2^b=16^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=b \\ 2^{a+b}=2^8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=b \\ a+b=8 \end{cases} \Rightarrow a+2a=8 \Rightarrow a=\frac{8}{3}$

RESPOSTA: e

12) Na figura, ABCD é um quadrado de lado 1, DEB e CEA são arcos de circunferências de raio 1.



Logo, a área da região hachurada é

a) $1-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

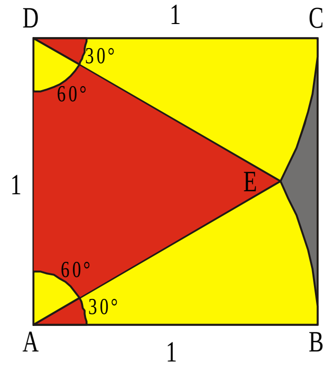
b) $1-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $1-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

d) $1+\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $1-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

RESOLUÇÃO:



- Analisando a figura acima vemos que a área pedida (a cinza) é dada pela seguinte diferença: Área $_{\text{quadrado ABCD}}$ – (Área $_{\text{triângulo AEC}}$ + 2.Área $_{\text{sector de 30°}}$) $\Rightarrow$

$$S = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \times \frac{30°}{360°} \times \pi \right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$$

RESPOSTA: c