

QUESTÃO.01

Carlos, Luis e Sílvio tinham, juntos, 100 mil reais para investir por um ano. Carlos escolheu uma aplicação que rendia 15% ao ano. Luis, uma que rendia 20% ao ano. Sílvio aplicou metade de seu dinheiro em um fundo que rendia 20% ao ano, investindo a outra metade numa aplicação de risco, com o rendimento anual pós-fixado. Depois de um ano, Carlos e Luis tinham juntos 59 mil reais; Carlos e Sílvio, 93 mil reais, Luis e Sílvio, 106 mil reais.

- Quantos reais cada um tinha inicialmente?
- Qual o rendimento da aplicação de risco?

RESOLUÇÃO:

Considerando como x , y , e z , os valores em reais que, respectivamente, possuíam Carlos, Luis e Sílvio, e de w , o montante resultante da aplicação de risco feita por Sílvio, temos o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 1,15x + 1,2y = 59 \\ 1,15x + 1,2 \times 0,5z + w = 93 \\ 1,2y + 0,6z + w = 106 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,15x - 1,2y = -13 \\ 1,15x + 1,2y = 59 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2,3x = 46 \\ x = 20 \\ 2,4y = 72 \\ y = 30 \\ z = 50 \end{cases}$$

$$1,2y + 0,6z + w = 106 \Rightarrow 1,2 \times 30 + 0,6 \times 50 + w = 36 + 30 + w = 106 \Rightarrow w = 106 - 66 = 40$$

Logo o rendimento da aplicação de risco foi de $40 - 25 = 15$

Em percentual este rendimento corresponde a $\frac{15}{25} = 0,6$.

Então o rendimento da aplicação de risco foi de 60% ao ano.

RESPOSTA:

- Carlos, Luis e Sílvio tinham, respectivamente, 20 mil reais, 30 mil reais e 50 mil reais.
- 60% ao ano.

QUESTÃO.02

Maria quer cobrir o piso de sua sala com lajotas quadradas, todas com lado de mesma medida inteira, em centímetros. A sala é retangular, de lados 2m e 5m. Os lados das lajotas devem ser paralelos aos lados da sala, devendo ser utilizadas somente lajotas inteiras. Quais são os possíveis valores do lado das lajotas?

RESOLUÇÃO:

O maior divisor comum entre 200cm e 500cm é 100cm.. Conseqüentemente os divisores de 100 são os divisores comuns entre 200 e 500. O conjunto destes divisores é $D = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$.

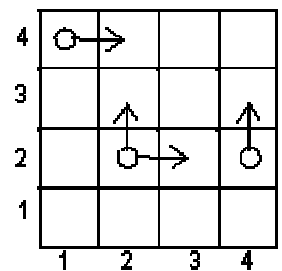
RESPOSTA: 1cm, 2cm, 4cm, 5cm, 10cm, 20cm, 25cm, 50cm ou 100cm.

QUESTÃO.03

Um tabuleiro tem 4 linhas e 4 colunas. O objetivo de um jogo é levar uma peça da casa inferior esquerda (casa (1,1)) para a casa superior direita (casa (4,4)), sendo que esta peça deve mover-se, de cada vez, para a casa imediatamente acima ou imediatamente à direita. Se apenas uma destas casas existir, a peça irá mover-se necessariamente para ela. Por exemplo, dois caminhos possíveis para completar o trajeto são $(1,1) \rightarrow (1,2) \rightarrow (2,2) \rightarrow (2,3) \rightarrow (3,3) \rightarrow (3,4) \rightarrow (4,4)$ e $(1,1) \rightarrow (2,1) \rightarrow (2,2) \rightarrow (3,2) \rightarrow (4,2) \rightarrow (4,3) \rightarrow (4,4)$.

a) Por quantos caminhos distintos pode-se completar esse trajeto?

b) Suponha que o caminho a ser percorrido seja escolhido da seguinte forma: sempre que houver duas opções de movimento, lança-se uma moeda não viciada; se der cara, a peça move-se para a casa à direita e se der coroa, ela se move para a casa acima. Desta forma, cada caminho contado no item a) terá uma certa probabilidade de ser percorrido. Descreva os caminhos que têm maior probabilidade de serem percorridos e calcule essa probabilidade.



RESOLUÇÃO:

a) A partir da casa (1,1) existem 3 opções de deslocamentos horizontais para a direita, que representaremos por H, H e H; e 3 deslocamentos verticais para cima, até a casa (4,4), que representaremos por V, V e V.

Logo um dos trajetos possíveis poderia ser HHVHVV. O número de trajetos possíveis será dado

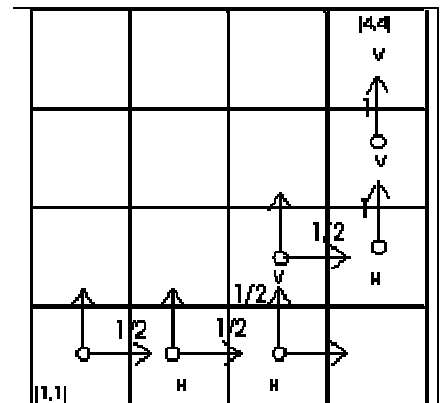
$$\text{por } P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 3!} = 20$$

Resposta: 20 trajetos diferentes.

Quando houver duas opções de movimento, a probabilidade de cada movimento será de $1/2$ e quando somente houver uma opção de movimento, a sua probabilidade é certa, ou seja, igual a 1.

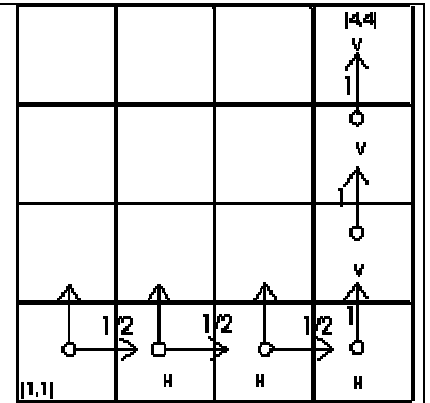
No percurso HHVHVV representado na figura ao lado, vemos que a probabilidade deste trajeto é

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{16}$$



No percurso HHHVVV, por exemplo, representado na figura ao lado, vemos que a probabilidade deste trajeto é

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{8}$$



Assim a maior probabilidade é de $\frac{1}{8}$.

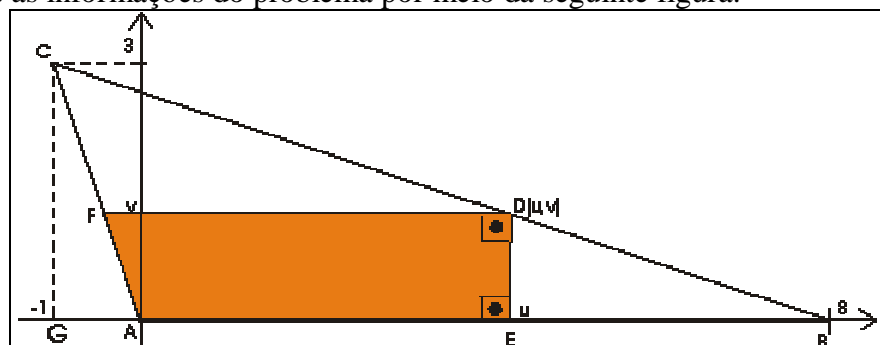
QUESTÃO.04

Sejam $A = (0,0)$, $B = (8,0)$ e $C = (-1,3)$ os vértices de um triângulo e $D = (u,v)$ um ponto do segmento \overline{BC} . Sejam E o ponto de intersecção de \overline{AB} com a reta que passa por D e é paralela ao eixo dos y e F o ponto de intersecção de \overline{AC} com a reta que passa por D e é paralela ao eixo dos x .

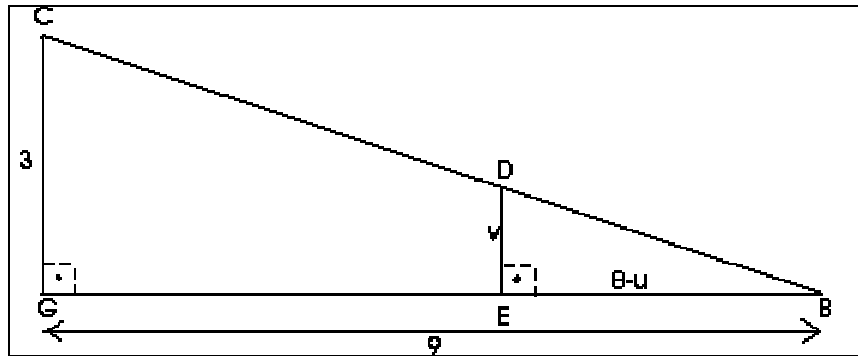
- Determine, em função de u , a área do quadrilátero $AEDF$.
- Determine o valor máximo de u para o qual a área do quadrilátero $AEDF$ é máxima.

RESOLUÇÃO:

Representemos as informações do problema por meio da seguinte figura:



Nesta figura destaquemos os triângulos retângulos semelhantes BED e BGC e os lados correspondentes são proporcionais.



$$\frac{8-u}{v} = \frac{9}{3} \Rightarrow 9v = 3(8-u) \Rightarrow v = \frac{8-u}{3} \Rightarrow D = \left(u, \frac{8-u}{3}\right).$$

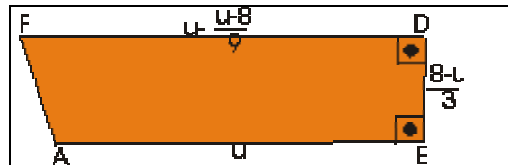
O ponto F é a interseção da reta $y = v$ com a reta \overrightarrow{AC} .

A reta \overrightarrow{AC} passa pelos pontos (0,0) e (-1,3), logo a sua equação é
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 = 0 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$$

$$-y - 3x = 0 \Rightarrow y = -3x.$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} y = -3x \\ y = v \end{cases} \Rightarrow 3x = -v \Rightarrow x = -\frac{v}{3}$; como $v = \frac{8-u}{3}$, temos

$$x = -\frac{1}{3} \left(\frac{8-u}{3}\right) = \frac{u-8}{9} \Rightarrow F = (x,v) = \left(\frac{u-8}{9}, \frac{8-u}{3}\right).$$



a) A área do trapézio retângulo AEDF é então

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{8u+8}{9} + u \right) \left(\frac{8-u}{3} \right) = \frac{(17u+8)(8-u)}{54} = \frac{-17u^2 + 128u + 64}{54} = \frac{-17u^2}{54} + \frac{64u}{27} + \frac{32}{27}.$$

O valor de u para o qual a área é máxima é
$$u = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{64}{27}}{-\frac{17}{27}} = \frac{64}{17}.$$

QUESTÃO.05

As raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + m$, onde m é um número real, estão em progressão aritmética. Determine

- o valor de m ;
- as raízes desse polinômio.

RESOLUÇÃO:

Como as três raízes estão em PA, podemos representá-las por $(a-r)$, a e $(a+r)$.

Sendo a soma das raízes igual a 3, então $(a-r) + a + (a+r) = 3 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1$.

Então as raízes em função de r , são $1-r$, 1 e $1+r$,

a) Como 1 é uma das raízes do polinômio $p(x)$ temos que $p(1) = 0 \Rightarrow$

$$p(1) = 1 - 3 + m = 0 \Rightarrow m = 2.$$

c) Como $m = 2 \Rightarrow p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Sendo 1 uma de suas raízes, o polinômio é divisível por $x - 1$.

Efetuada a divisão de $p(x)$ por $x - 1$ por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

Então $p(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Rightarrow x-1=0$ ou $x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow$

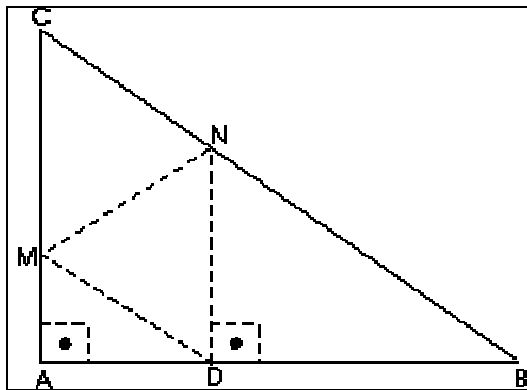
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Logo as raízes do polinômio são $1 - \sqrt{3}$, 1 e $1 + \sqrt{3}$.

QUESTÃO.06

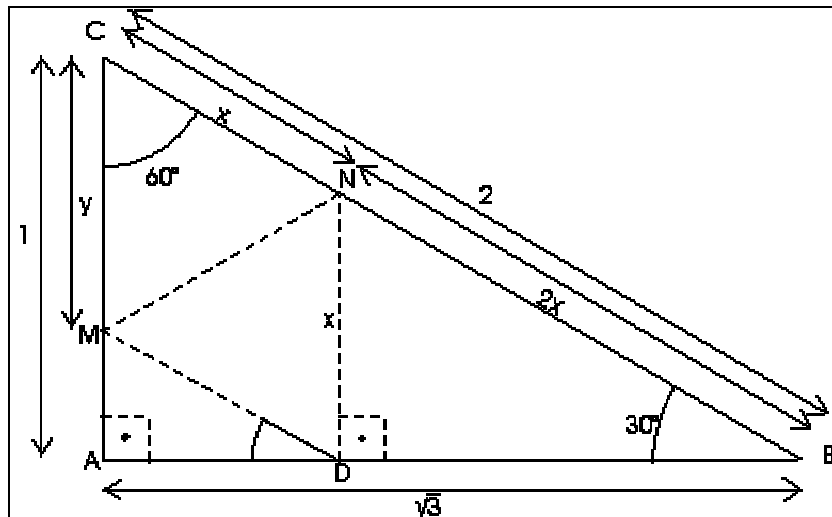
O triângulo retângulo ABC , cujos catetos \overline{AC} e \overline{AB} medem 1 e $\sqrt{3}$, respectivamente, é dobrado de tal forma que o vértice C coincide com o ponto D do lado \overline{AB} . Seja \overline{MN} o segmento ao longo do qual ocorreu a dobra. Sabendo que \widehat{NDB} é reto, determine

- o comprimento dos segmentos \overline{CN} e \overline{CM} .
- A área do triângulo CMN .



RESOLUÇÃO:

O lado \overline{BC} deste triângulo mede $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$.



a)

$$\operatorname{tg} \hat{A}BC = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \hat{A}BC = 30^\circ \Rightarrow BN = \frac{x}{\sin 30^\circ} = 2x \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Como $\overline{ND} \parallel \overline{CM}$ (\overline{ND} e \overline{CM} são perpendiculares a \overline{AB}) e $\overline{CN} \cong \overline{ND} \Rightarrow \overline{MD} \parallel \overline{CN} \Rightarrow MCND$ é um losango e $MC = ND = \frac{2}{3}$.

b)

A área do triângulo CMN pode ser calculado através da relação $S = \frac{1}{2} CM \times CN \times \sin \hat{M}CN$.

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

QUESTÃO.07

Determine as soluções da equação $(2 \cos^2 x + 3 \operatorname{sen} x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0$ que estão no intervalo $\{0, 2\pi\}$.

RESOLUÇÃO:

$$(2 \cos^2 x + 3 \operatorname{sen} x) = 0 \text{ ou } (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0$$

$$\text{I) } (2 \cos^2 x + 3 \operatorname{sen} x) = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cos^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + 3 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x = 2 \text{ (impossível) ou } \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6}.$$

$$\text{II) } \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \Rightarrow$$

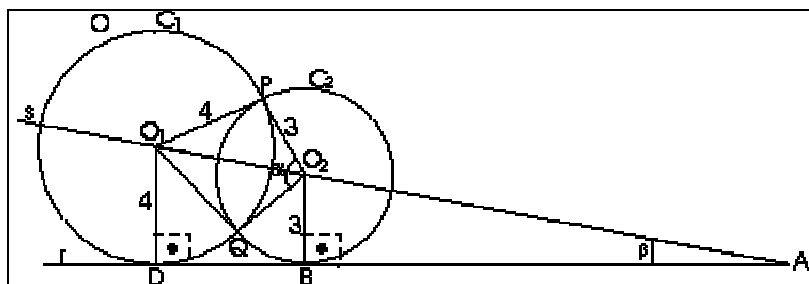
$$\left\{ k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, k = 1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, k = 2 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \text{ e } k = 3 \rightarrow x = \frac{7\pi}{4} \right\}$$

Então o conjunto solução da equação considerada é

$$\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

QUESTÃO.08

RESOLUÇÃO:



No triângulo retângulo ABO_2 , como $\text{sen} \beta = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{O_2B}{AO_2} = \frac{1}{5} \Rightarrow AO_2 = 5O_2B = 5 \times 3 = 15$.

E no triângulo retângulo AO_1D , $\frac{O_1D}{AO_1} = \frac{1}{5} \Rightarrow AO_1 = 5O_1D = 5 \times 4 = 20$.

A medida do segmento $\overline{O_1O_2}$ será dada por $AO_1 - AO_2 = 20 - 15 = 5$

Assim o triângulo O_1PO_2 tendo os lados medindo 5, 4 e 3, também é retângulo, no qual um dos ângulos agudos é $\frac{\alpha}{2}$. O $\text{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$ e o $\text{cos} \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$.

a) A área do quadrilátero O_1QO_2P é o dobro da área do triângulo retângulo O_1PO_2 :

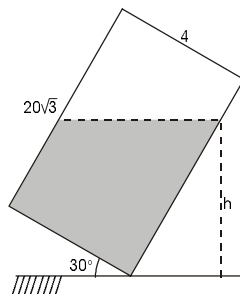
$$S = 2 \times \frac{3 \times 4}{2} = 12 \text{ u.c.}$$

$$\text{b) O } \text{sen} 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \text{sen} \alpha = 2 \text{sen} \frac{\alpha}{2} \text{cos} \frac{\alpha}{2} = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}.$$

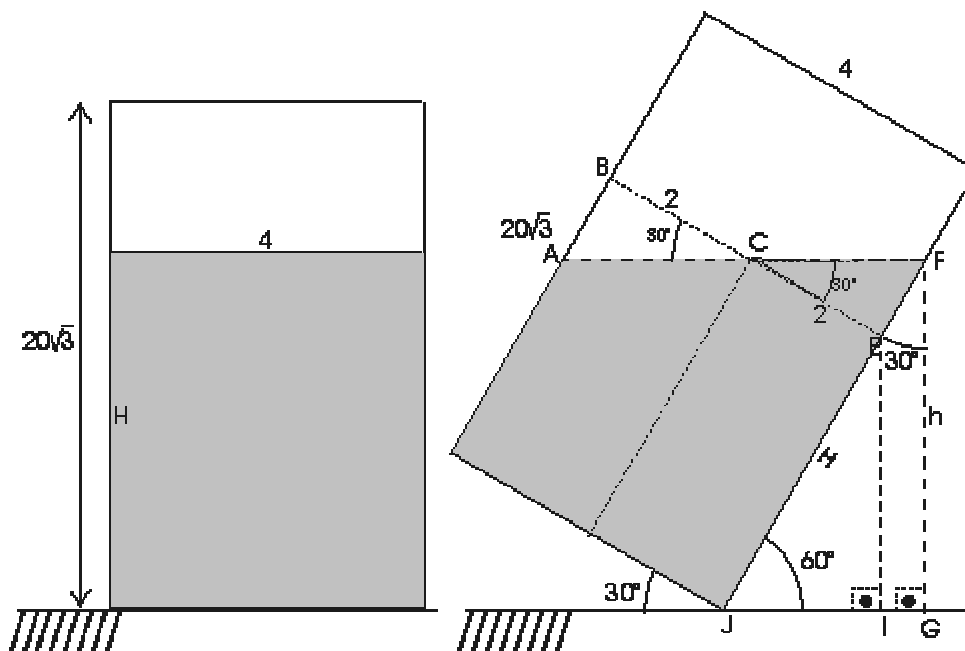
QUESTÃO.09

Um bloco retangular(isto é, um paralelepípedo reto-retângulo) de base quadrada de lado 4cm e altura $20\sqrt{3}$ cm, com $\frac{2}{3}$ de seu volume cheio de água, está inclinado sobre uma das arestas da base,

formando um ângulo de 30° com o solo (ver seção lateral abaixo) . Determine a altura h do nível da água em relação ao solo.



RESOLUÇÃO:



Na figura acima temos à esquerda a representação do bloco assentado ao solo. Como o volume de

água nele contida é $\frac{2}{3}$ da sua capacidade total , temos $16H = 16 \times (20\sqrt{3}) \times \frac{2}{3} \Rightarrow H = \frac{40\sqrt{3}}{3}$.

À direita vemos a representação do mesmo bloco com a inclinação de 30° em relação ao solo. O ponto C é o ponto médio de \overline{BC} .

No triângulo retângulo CEF temos $\text{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{EF}{2} \Rightarrow EF = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

No triângulo retângulo FGJ temos $\text{sen}60^\circ = \frac{h}{FJ} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{JE + EF} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{\frac{40\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3h}{42\sqrt{3}} \Rightarrow h = 21 \text{ cm.}$$

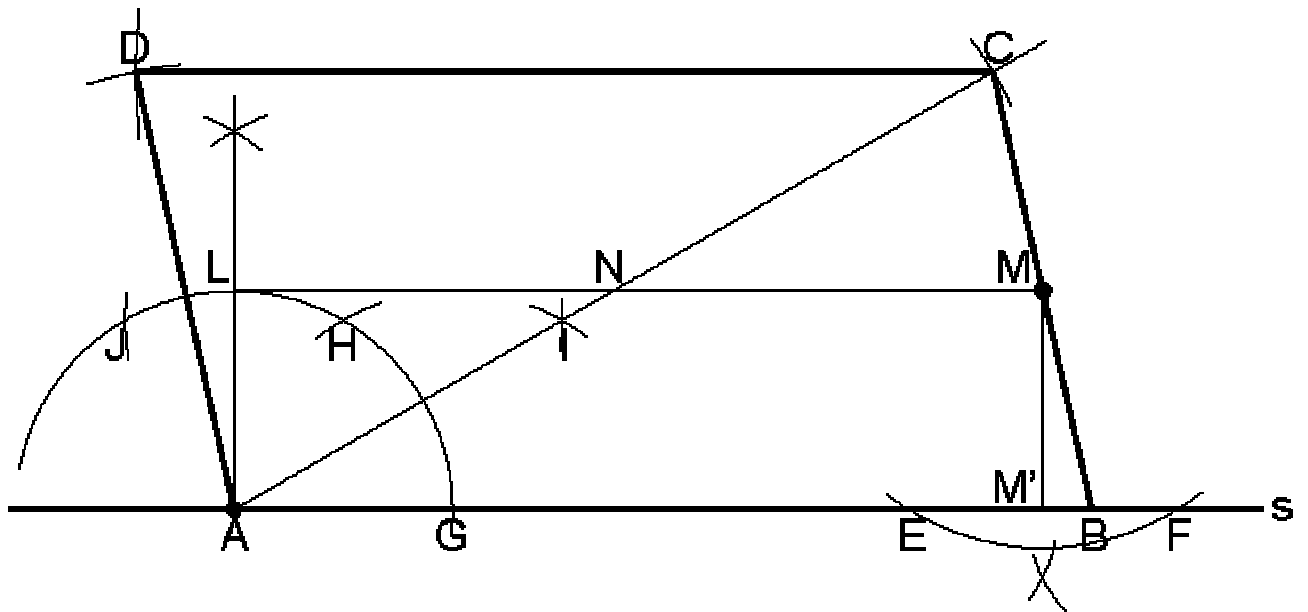
QUESTÃO.10

São dados a seguir, os pontos A e M e a reta s . Sabe-se que o ponto A é vértice de um paralelogramo $ABCD$; o lado \overline{AB} está na reta s ; M é o ponto médio do lado \overline{BC} e o ângulo \widehat{CAB} tem medida 30° . Usando régua e compasso, construa esse paralelogramo. Descreva e justifique sua construção.



RESOLUÇÃO:

Descrição e justificativa.



- 01) Tomando-se como centro o ponto M , traça-se um arco de circunferência que intercepta a reta s nos pontos E e F . Com centro em E e F , respectivamente, determina-se M' , ponto médio do segmento \overline{EF} . Traça-se o segmento $\overline{MM'}$ perpendicular à reta s .
- 02) Com raio igual a MM' e centro no ponto A , traça-se uma semi circunferência determinando o ponto G . Com mesmo raio e centro em G , determina-se o ponto H , e o primeiro arco determinante do ponto I .
- 03) O arco \widehat{GH} tem 60° porque \overline{GH} tem medida igual ao raio \overline{AG} . Depois, com centro em H , traçam-se os pontos J , o segundo arco determinante de I e o primeiro arco determinante de L . Por último, com o centro em J traça-se o segundo arco determinante de L .
- 04) Traça-se a semi-reta \overline{AI} que forma com a reta s um ângulo de 30° , pois \overline{AI} é a bissetriz do arco \widehat{GH} que mede 60° .

- 05) Levanta-se $\overline{AL} \perp s$. Do ponto de interseção do arco GHJ com o segmento \overline{AL} até o ponto M, traça-se o segmento $\overline{ML} \parallel s$.
- 06) Prolonga-se a semi-reta \overline{AI} que, ao interceptar o segmento $\overline{ML} \parallel s$, determina o ponto N, que é o ponto médio da diagonal \overline{AC} , pois M é o ponto médio de \overline{BC} (Teorema de Tales)..
- 07) Com centro em N e raio \overline{AN} determina-se sobre \overline{AH} o ponto C.
- 08) Traça-se uma semi-reta \overline{CM} que, ao interceptar a reta s, determina o ponto B.
- 09) Com centro em C e raio \overline{AB} , centro em A e raio \overline{BC} , traçam-se dois arcos cuja interseção é o ponto D, quarto vértice do paralelogramo ABCD.