

**UFBA 2003 - 2ª FASE - MATEMÁTICA –
RESOLUÇÃO E COMENTÁRIOS POR PROFA. MARIA ANTÔNIA GOUVEIA.**

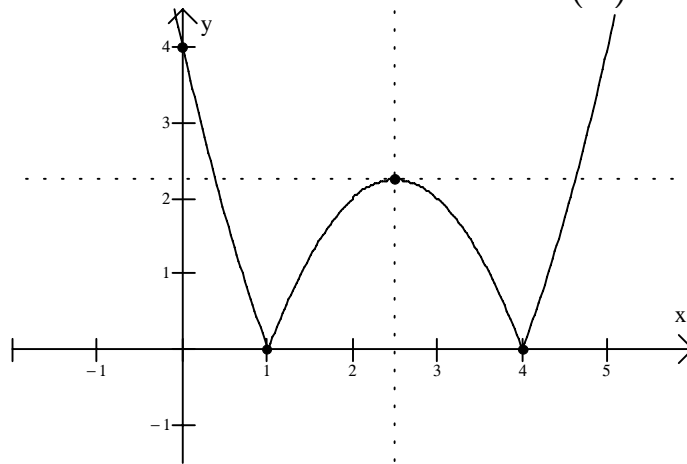
Questão 01 (Valor: 10 pontos)

Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |-x^2 + 5x - 4|$, incluindo as interseções com os eixos coordenados.

RESOLUÇÃO:

Raízes: $-x^2 + 5x - 4 = 0 \Rightarrow -(x - 4)(x - 1) \Rightarrow x = 1$ ou $x = 4$.

Vértice da função $g(x) = -x^2 + 5x - 4$: $x_v = \frac{-5}{-2} = 2,5$ e $y_v = g\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 4 = -\frac{9}{4}$



Questão 02 (Valor: 10 pontos)

Determine os polinômios da forma $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ que são divisíveis por $x - 1$ e $x + 1$, sabendo que b, c e $d \in \mathbb{R}$ e $bd = -1$.

RESOLUÇÃO:

$$p(1) = 1 + b + c + d = 0 \Rightarrow b + c + d = -1.$$

$$p(-1) = -1 + b - c + d = 0 \Rightarrow b - c + d = 1.$$

Resolvendo agora o sistema

$$\begin{cases} b + c + d = -1 \\ b - c + d = 1 \\ bd = -1 \end{cases} \text{ somando as duas primeiras equações} \Rightarrow \begin{cases} 2b + 2d = 0 \\ bd = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -d \\ -b^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } b = 1 \\ d = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \text{se } b = -1 \\ d = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} c = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Resposta: Os polinômios são $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ e $p(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Questão 03 (Valor: 15 pontos)

Determine uma equação da circunferência de centro $(-1,2)$, sabendo que a equação $3x + y - 9 = 0$ representa uma reta tangente a essa circunferência.

RESOLUÇÃO:

Se a reta é tangente à circunferência, então a distância do centro $(-1,2)$ à reta de equação $3x + y - 9 = 0$ é também a medida do raio da circunferência.

$$\text{Então } R = \frac{|3(-1) + 1(2) - 9|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

A equação da circunferência é:

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{10})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 + 4 - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$$

Resposta a equação é $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$.

Questão 04 (Valor: 15 pontos) Considere os números complexos $z = -1 + \sqrt{3}i$ e

$w = \sqrt{3} + i$ e sejam A e B os pontos que representam, no plano cartesiano, os complexos zw e $\frac{z^2}{w}$, respectivamente.

A partir dessas informações, determine o cosseno do ângulo AOB, sendo O a origem do plano cartesiano.

RESOLUÇÃO:

$$zw = (-1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = -2\sqrt{3} + 2i \Rightarrow A = (-2\sqrt{3}, 2)$$

$$\frac{z^2}{w} = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)^2}{\sqrt{3} + i} = \frac{(-2 - 2\sqrt{3}i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{-4\sqrt{3} - 4i}{4} = -\sqrt{3} - i \Rightarrow B = (-\sqrt{3}, -1)$$

O segmento OA forma com o eixo dos x o ângulo α , tal que

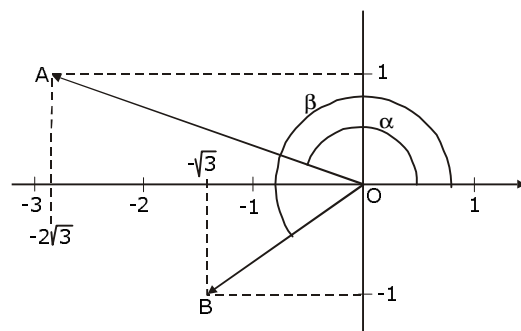
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{-2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 150^\circ$$

O segmento OB forma com o eixo dos x o ângulo β , tal que

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = 210^\circ$$

Logo o ângulo AOB mede $210^\circ - 150^\circ = 60^\circ$.

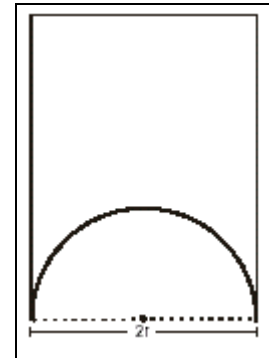
Assim o $\cos(\widehat{AOB}) = \frac{1}{2}$



Questão 05 (Valor: 20 pontos)

Deseja-se fabricar bandeiras com perímetro de 50cm e formato obtido retirando-se um semi-círculo de um retângulo em que um dos lados, medindo $2r$ cm, coincide com o diâmetro do semi-círculo retirado, conforme figura.

Nessas condições, determine o valor de r para o qual a área da bandeira é máxima.



RESOLUÇÃO:

O perímetro da bandeira é igual $AC+CD+BD + \pi r = 50 \Rightarrow$

$$2x + 2r + \pi r = 50 \Rightarrow$$

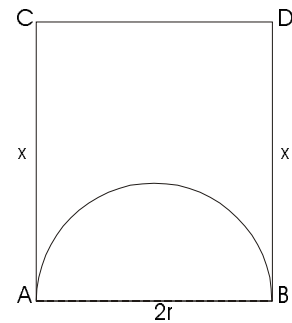
$$x = \frac{50 - 2r - r\pi}{2} \Rightarrow \text{a área de cada bandeira será :}$$

$$S = S_{ABCD} - S_{\text{semi círculo}}$$

$$S = 2r \left(\frac{50 - 2r - r\pi}{2} \right) - \frac{\pi r^2}{2} = -\frac{(3\pi + 4)r^2}{2} + 50r$$

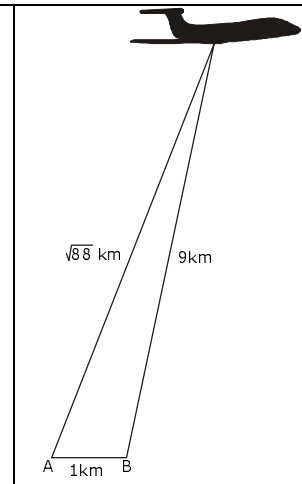
O valor de r para que a área seja máxima é

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2 \left(-\frac{3\pi + 4}{2} \right)} = \frac{50}{3\pi + 4} \text{ cm.}$$



Questão 06 (Valor: 10 pontos)

A figura mostra a posição de um avião observado a partir de dois pontos, A e B, localizados no solo e distantes 1km um do outro. Sabe-se que, nesse instante, o avião dista, respectivamente, $\sqrt{88}$ km e 9km, dos pontos A e B. Nessas condições, determine a altura do avião, em relação ao solo, no instante considerado



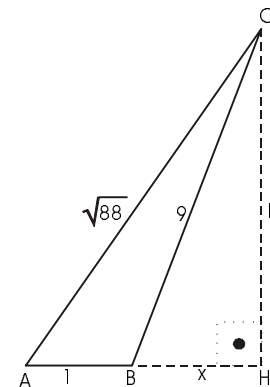
No triângulo AHC: $h^2 = 88 - (1+x)^2$.

No triângulo BHC: $h^2 = 81 - x^2$.

Assim $88 - (1+x)^2 = 81 - x^2 \Rightarrow 2x = 88 - 81 - 1 \Rightarrow x = 3$.

Logo $h^2 = 81 - 9 = 72 \Rightarrow h = 6\sqrt{2}$.

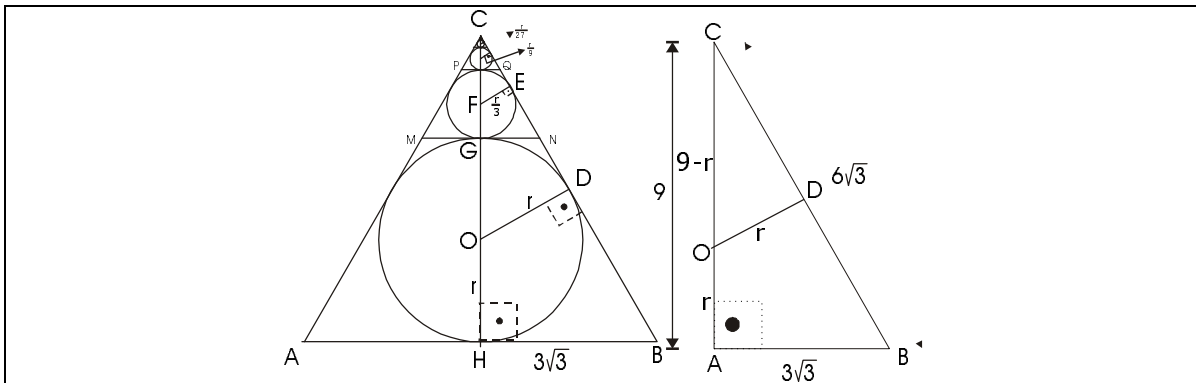
Resposta: Em relação ao solo a altura do avião é de $6\sqrt{2}$ km .



Questão 07 (Valor: 20 pontos)

Considere um cone circular reto, de altura igual a 9 u.c. e raio de base medindo $3\sqrt{3}$ u.c., contendo esferas $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$. Sabe-se que S_1 está inscrita no cone e que cada esfera, a partir da segunda, é tangente à anterior e à superfície lateral do cone. Com base nessas informações, calcule a soma infinita dos volumes das esferas.

RESOLUÇÃO:



No triângulo retângulo HBC : $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow$ que o triângulo

ABC é equilátero e circunscrito ao círculo de raio r , então a sua altura $HC = 3r \Rightarrow 3r = 9 \Rightarrow r = 3$.

Os triângulos MCN, PCQ,.....são também equiláteros.

Então como $CG = 3 \Rightarrow r_1 = 1 \Rightarrow$ que a altura do triângulo PCQ é igual a $1 \Rightarrow r_2 = \frac{1}{3}$,

As infinitas esferas têm raios ; $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ formando uma PG de razão $\frac{1}{3}$.

Os volumes dessas esferas são:

$\frac{4\pi}{3} \cdot 3^3; \frac{4\pi}{3} \cdot 1; \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3; \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3; \dots = 36\pi; \frac{4\pi}{3}; \frac{4\pi}{81}; \frac{4\pi}{2187}; \dots$ que é uma PG de

razão $\frac{4\pi}{3} : 36\pi = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{36\pi} = \frac{1}{27} \Rightarrow$ A soma dos volumes das infinitas esferas é

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{36\pi}{1 - \frac{1}{27}} = 36\pi \cdot \frac{26}{27} = \frac{104\pi}{3}.$$