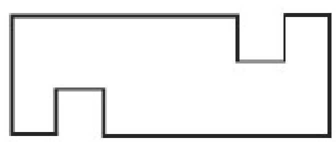
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CONCURSO DE SELEÇÃO 2003
17.11.2002

MATEMÁTICA

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS.

Questão 1:
De um retângulo de 18 cm de largura e 48 cm de comprimento foram retirados dois quadrados de lados iguais a 7 cm, como mostra a figura. Qual o perímetro da figura resultante?



RESOLUÇÃO:
O perímetro da nova figura será o perímetro da figura original acrescida da área de um quadrado de 7cm de lado.
$2\times(48 + 18) + 4\times7 = 132 + 28 = 160$cm.
RESPOSTA: 160cm.

Questão 2:

Uma pedra de massa 25 kg tem a forma de um paralelepípedo com 2 cm de espessura. Sua base é um quadrado com 1 m de lado. Qual a massa de uma outra pedra, do mesmo material, que tem a forma de um paralelepípedo com 2 m de comprimento, 80 cm de largura e 3 cm de espessura?

RESOLUÇÃO:
$V_1 = (0{,}02\times1\times1)\ m^3 = 0{,}02\ m^3$.
$V_2 = (2\times0{,}8\times0{,}03)\ m^3 = 0{,}048\ m^3$.

$$\frac{25}{0{,}02} = \frac{x}{0{,}048} \Rightarrow 20x = 25\times48 \Rightarrow 20x = 1200 \Rightarrow x = 60$$

RESPOSTA: 60 kg.

Questão 3:
Maria faz hoje 44 anos e tem dado um duro danado para sustentar suas três filhas: Marina, de 10 anos; Marisa, de 8 anos; e Mara, de 2 anos. Maria decidiu que fará uma viagem ao Nordeste para visitar seus pais, no dia do seu aniversário, quando sua idade for igual à soma das idades de suas três filhas. Com que idade Maria pretende fazer a viagem?

RESOLUÇÃO:

Nomes	Idades atuais	Idades daqui a x anos
Maria	44	44+x
Marina	10	10+x
Marisa	8	8+x
Mara	2	2+x

$44+x = 20 + 3x \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12$.
Logo Maria terá (44 + 12) = 56 anos.

Questão 4:

Certo consumidor foi a um restaurante em que podia servir-se à vontade de comida, pagando o preço fixo de R$8,00; as bebidas, porém, servidas pelo garçom, eram cobradas à parte. Na hora de pagar a conta, constatou que lhe cobravam 10% de taxa de serviço sobre o total de sua despesa. Considerando que só as bebidas lhe foram servidas pelo garçom, pagou sua despesa incluindo a taxa de 10% somente sobre seu gasto com bebidas. Qual a diferença entre a importância que lhe cobraram e a efetivamente paga?

RESOLUÇÃO:

Como a nota que lhe apresentaram cobrava 10% (R$ 8,00 + despesa c/bebidas), a diferença entre a importância que lhe cobraram e a efetivamente paga foi de 10% de R$ 8,00 = R$0,08.
RESPOSTA: R$0,08.

Questão 5:
Seu Juca resolveu dar a seu filho Riquinho uma mesada de R$300,00 por mês. Riquinho, que é muito esperto, disse a seu pai que, em vez da mesada de R$300,00, gostaria de receber um pouquinho a cada dia: R$1,00 no primeiro dia de cada mês e, a cada dia, R$1,00 a mais que no dia anterior. Seu Juca concordou, mas, ao final do primeiro mês, logo percebeu que havia saído no prejuízo. Calcule quanto, em um mês com 30 dias, Riquinho receberá a mais do que receberia com a mesada de R$300,00.

RESOLUÇÃO:
Os valores que Riquinho recebeu a partir do primeiro dia forma a seqüência : 1, 2,3,..., 30, que é uma progressão aritmética de 30 termos e razão 1.

A soma dos valores desta seqüência é $\frac{(1+30)\times 30}{2} = 465$.

Logo Riquinho recebeu a mais R$ 165,00.

Questão 6:

Considere a brincadeira a seguir. Pense em um número. Some 3. Multiplique o resultado por 4. Subtraia 6. Divida o resultado por 2. Subtraia duas vezes o número que você pensou. Qual o resultado? Explique por que o resultado não depende do número em que você pensou.

RESOLUÇÃO:

$\{[(x+3)\times 4-6]\div 2\}-2\times x=(4x+12-6)\div 2-2x=2x+3-2x=3$.

O resultado final será sempre 3.

Questão 7:

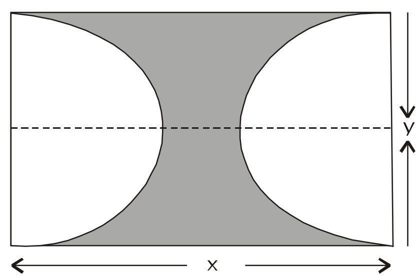
Numa pesquisa, feita com todos os moradores de um prédio, constatou-se que mais de 45% são homens e que mais de 60% pintam o cabelo. Explique por que se pode concluir que, nesse prédio, há homens que pintam o cabelo.

RESOLUÇÃO:

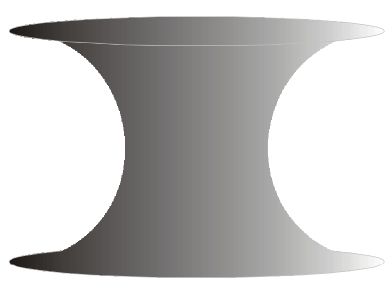
O número de mulheres é menor que 55%. Se somente as mulheres pintassem o cabelo, o número dos que pintam o cabelo seria menor do que 55%, o que contradiz ao dado do problema que informa que o número dos que pintam o cabelo é superior a 60%. LOGO NESTE PRÉDIO EXISTEM HOMENS QUE PINTAM O CABELO.

Questão 8:

Considere um retângulo, de altura *y* e base *x*, com $x > y$, e dois semicírculos com centros nos lados do retângulo, como na figura abaixo. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região sombreada em torno de um eixo que passa pelos centros dos semicírculos. Calcule a área de *F*.



RESOLUÇÃO:



$$\mathbf{V_{cilindro}} - \mathbf{V_{esfera}} = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 y - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^3 = \frac{\pi x^2 y}{4} - \frac{4\pi y^3}{8} = \frac{2\pi x^2 - 4\pi y^3}{8} = \frac{\pi x^2 - 2\pi y^3}{4}$$

Questão 9:

Seja *f* a função real dada por f (x) = ax² + bx + c, com a > 0. Determine **a, b** e **c** sabendo que as raízes da equação $\left|f(x)\right| = 12$ são –2, 1, 2 e 5.

RESOLUÇÃO:

ax² + bx + c = ± 12 $\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{ax^2 + bx + c = 12} \\ \mathbf{ou} \\ \mathbf{ax^2 + bx = -12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{(I)}\ \mathbf{ax^2 + bx + c - 12 = 0} \\ \mathbf{(II)\ ax^2 + bx + c + 12 = 0} \end{cases}$

Em relação às raízes e coeficientes, na equação **(I)** temos $\begin{cases} S = \dfrac{-b}{a} \\ P = \dfrac{c-12}{a} \end{cases}$ e na equação **(II)**

$\begin{cases} S_1 = \dfrac{-b}{a} \\ P_1 = \dfrac{c+12}{a} \end{cases}$. –2, 1, 2 e 5

Vemos que nos dois casos as somas das raízes são iguais. Combinando dois a dois os quatro valores –2, 1, 2 e 5, dados como raízes, buscando os que satisfazem esta condição : -2 + 5 = 1 +2.

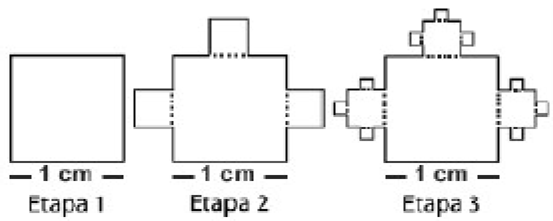
Como a > 0 , $\dfrac{c+12}{a} > \dfrac{c-12}{a} \Rightarrow$

$P_1 > P \Rightarrow P_1 = 1.2 = 2$ e P = -2. 5 = -10. ⇒ 1 e 2 são raízes da equação **(II)** e –2 e 5 são raízes da equação **(I)**.

$$\frac{-b}{a} = 3\ ,\ \frac{c+12}{a} = 2 \text{ e } \frac{c-12}{a} = -10 \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c + 12 = 2a \\ c - 12 = -10a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ 12a = 24 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \\ c = -8 \end{cases}$$

Questão 10:

A região fractal *F*, construída a partir de um quadrado de lado 1cm, é constituída por uma infinidade de quadrados e construída em uma infinidade de etapas. A cada nova etapa consideram-se os quadrados de menor lado (l) acrescentados na etapa anterior e acrescentam-se, para cada um destes, três novos quadrados de lado $l/3$. As três primeiras etapas de construção de *F* são apresentadas a seguir.



Calcule a área de *F*.

RESOLUÇÃO:
A área de F é:

$$\left[1+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\times3\left(\frac{1}{9}\right)^2+3\times3\times3\left(\frac{1}{27}\right)^2+3\times3\times3\times3\times\left(\frac{1}{81}\right)^2+\ldots\right]=$$

$= 1 + \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$ (A soma de uma PG infinita onde $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$, então

$S_n = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{2}$.

RESPOSTA: $\frac{3}{2}$.cm².