CONCURSO DE SELEÇÃO 2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

24.11.2002

MATEMÁTICA

RESOLUÇÃO PELA PROFESSORA MARIA ANTÔNIA CONCEIÇÃO GOUVEIA

A ilustração que substitui a original da questão 7, e as das resoluções das questões 4 e 7 , foram construídas por HERNANI BORGES.

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS.

Questão 1:

Seja p: IR . IR dada por p(x) = (x-1)(x-2)(x-3). Para que valores de x se tem **p(x)** ≥ 0 **?**

RESOLUÇÃO:

Os números 1, 2 e 3 são as raízes do polinômio p(x) = (x-1)(x-2)(x-3).

Estudando a variação do sinal da função:

		1		2		3	
x-1	-	•	+		+		
x-2	-		-	•	+		
x-3	-		-		-		
p(x)	-	•	+	•	-		

RESPOSTA: **p(x)** ≥ 0 para $\mathbf{1 \leq x \leq 2}$.

Questão 2:

Os números reais a, b, c e d formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} e^a & e^b \\ e^c & e^d \end{pmatrix}$.

RESOLUÇÃO:

Como os números reais a, b, c e d formam, nesta ordem, uma progressão aritmética, e como em toda progressão aritmética a soma dos termos eqüidistantes são equivalentes, então a + d = b + c.

$\det(A) = e^a \cdot e^d - e^b \cdot e^c \Rightarrow e^{a+d} - e^{b+c}$, sendo a + d = b + c, $e^{a+d} - e^{b+c} = 0$.

RESPOSTA: 0.

Questão 3:

Seja z o número complexo $\dfrac{2+3i}{\alpha+i}$. Determine o valor de α para que z seja um imaginário puro.

RESOLUÇÃO:

Consideremos o número complexo $\alpha = x + yi$.

Então $\dfrac{2+3i}{\alpha+i} = \dfrac{2+3i}{x+yi+i} = \dfrac{2+3i}{x+(y+1)i}$.

Multiplicando ambos os termos da fração por $[x - (y+1)i]$:

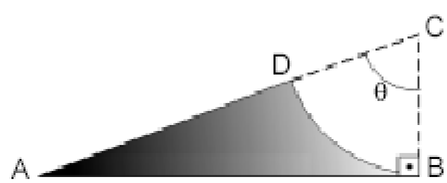
$$\frac{(2+3i)[x-(y+1)i]}{[x+(y+1)i][x-(y+1)i]} = \frac{2x+3y+3+(3x-2y-2)i}{x^2+(y+1)^2} .$$

Para que este número seja imaginário puro devemos ter $2x + 3y + 3 = 0 \Rightarrow$

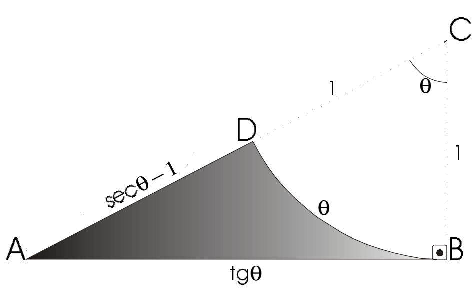
$y = \dfrac{-(2x+3)}{3} \Rightarrow \alpha = x + \left(-\dfrac{2x+3}{3}\right)i = x - \left(\dfrac{2x+3}{3}\right)i$.

Questão 4:

Determine, em função de θ, o perímetro da figura ABD, obtida retirando-se do triângulo retângulo ABC o setor circular BCD (de centro em C, raio 1 e ângulo θ).



RESOLUÇÃO:

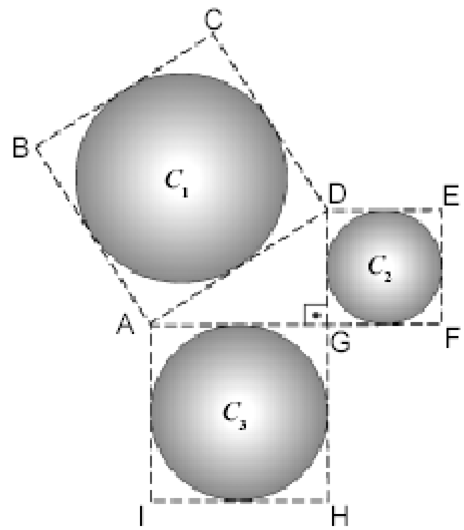


AC. cosθ = 1 $\Rightarrow$ AC = secθ $\Rightarrow$ AD = 1 - secθ

Considerando que θ é a medida do ângulo $D\hat{C}B$ em radianos, o perímetro pedido será

$1 - \sec\theta + 1 + \theta = 2 - \sec\theta + \theta$.

Questão 5:
Na figura abaixo, os círculos C_1, C_2 e C_3 estão inscritos nos quadrados ABCD, DEFG e GHIA, respectivamente. Sabendo-se que o ângulo $D\hat{G}A$ é reto e que a área de C_1 é igual a 1, calcule a soma das áreas de C_2 e de C_3.



RESOLUÇÃO:

Sendo a área de $C_1 = 1 \Rightarrow r_1 = \sqrt{\dfrac{1}{\pi}} \Rightarrow$ que o lado AD do quadrado ABCD = $2 \times \sqrt{\dfrac{1}{\pi}}$.

Como $2r_2 = DG$ e $2r_3 = AG \Rightarrow r_2 = \dfrac{DG}{2}$ e $r_3 = \dfrac{AG}{2} \Rightarrow S(C_2) = \pi\left(\dfrac{DG}{2}\right)^2$ e $S(C_3) = \pi\left(\dfrac{AG}{2}\right)^2$.

A soma das áreas de C_2 e C_3 é:

$$S(C_2) + S(C_3) = \pi\left(\frac{DG}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{AG}{2}\right)^2 =$$

$$\pi\left(\frac{(DG)^2 + (AG)^2}{4}\right) = \pi\left(\frac{(AD)^2}{4}\right) = \pi \times \frac{\left(2 \times \sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)^2}{4} = \frac{4}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = 1.$$

RESPOSTA: 1.

Questão 6:
Considere um tabuleiro quadrado, semelhante aos usados nos jogos de xadrez e de damas (na Figura 1, vemos um tabuleiro de xadrez). Nosso tabuleiro, porém, tem $1000 \cdot 1000 = 10^6$ casas, no lugar das $8 \cdot 8 = 64$ casas do tabuleiro de xadrez convencional. Cada casa é designada por um par ordenado (m, n) de números naturais, ambos variando de 1 a 1000 (na Figura 2, está assinalada a

casa (7, 6). Uma peça pode se mover no tabuleiro, a cada jogada, para qualquer das casas adjacentes à que esteja ocupando (ver Figura 3). **A distância entre duas casas é definida como o menor número de jogadas para que uma peça passe de uma casa até a outra**. Considere, em nosso tabuleiro, as casas *A* = (1, 1), *B* = (998, 999) e *C* = (1, 1000). **Qual das duas distâncias (segundo a definição acima) é menor: a distância entre *A* e *B* ou a entre *A* e *C* ? Em outras palavras: partindo de *A*, a qual, dentre as casas *B* e *C*, se pode chegar em menos jogadas? Por quê?**

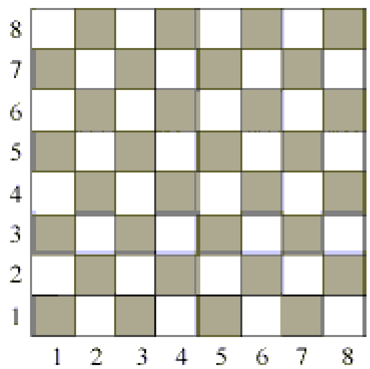


Figura 1

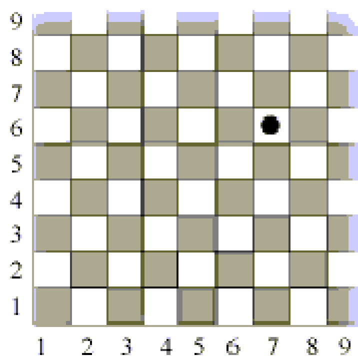


Figura 2

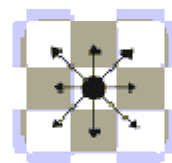
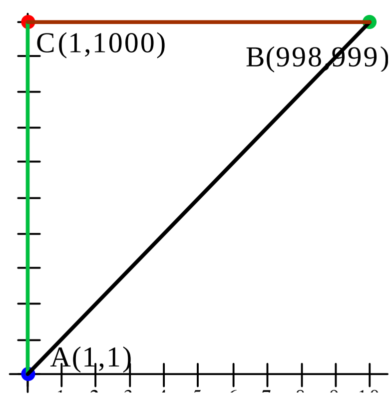


Figura 3

RESOLUÇÃO:



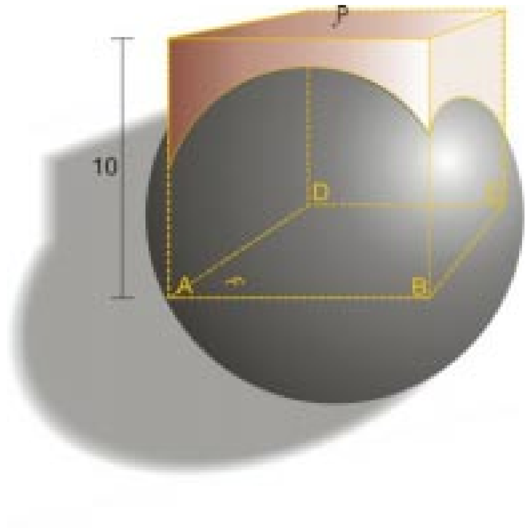
De acordo com a definição dada no texto a distância entre duas casas quaisquer do tabuleiro é o menor número de jogadas que leva de uma casa a outra . Então a distância entre a casa (m,n) e a casa (a,b) , por exemplo, será : max $(|m-a|,|n-b|)$.

A distância entre A e B será max (997,998) = 998 jogadas.
A distância entre A e C será max (0, 999)= 999 jogadas.

RESPOSTA : a distância entre A e B.

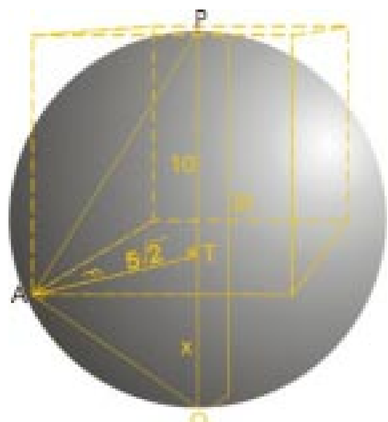
Questão 7:

Um cubo de aresta 10 cm tem os quatro vértices A, B, C e D de uma de suas faces, *F*, sobre a superfície de uma esfera *S* de raio *r*. **Sabendo que a face oposta a *F* é tangente à esfera *S* no ponto *P*, calcule o raio *r*.**



RESOLUÇÃO:

Consideremos o círculo máximo DA ESFERA que passa pelo ponto A.



O triângulo PAQ é retângulo (tem como maior lado o diâmetro do círculo máximo) cuja hipotenusa mede 2r.
PT é a altura do cubo. T é o centro da diagonal da face ABCD, então AT é a metade da diagonal desta face, logo sua medida é $5\sqrt{2}$.

Como o triângulo é retângulo, vale a relação AT² = QT . TP $\Rightarrow \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 10x \Rightarrow$

$x = \dfrac{50}{10} = 5 \Rightarrow 2r = 10 + 5 = 15 \Rightarrow r = 7{,}5\text{cm}$

RESPOSTA: 7,5 cm.

Questão 8:
Uma reta divide o plano em 2 regiões; duas retas dividem-no em, no máximo, 4 regiões; três retas dividem-no em, no máximo, 7 regiões; e assim sucessivamente. Em quantas regiões, no máximo, 37 retas dividem o plano?

RESOLUÇÃO :
Representando por n o número de retas e por R_n o número de regiões determinadas no plano por essas n retas.

1 reta divide o plano em no máximo (1+1) regiões = R_1
2 retas dividem o plano em no máximo (2 + 2) regiões = $R_1 + 2$.
3 retas dividem o plano em no máximo (4 + 3) regiões = $R_1 + 2 + 3$.
4 retas dividem o plano em no máximo (7 + 3) regiões = $R_1 + 2 + 3 + 4$.
5 retas dividem o plano em no máximo (10 + 5) regiões = $R_1+2+3+4+5$
....
....
....
n retas dividem o plano em no máximo (R_{n-1} + n) regiões= $R_1+2+3+4+5+\dots n$
Observamos que 2+3+4+5 +...n é a soma dos n termos de uma PA de razão 1.
Então 37 retas dividem o plano em no máximo 2 + $\frac{(2+37)36}{2}$ = 2+ 702 = 704 retas.

RESPOSTA : 704 retas.

Questão 9:
Um número natural deixa resto 3, quando dividido por 7, e resto 5, quando dividido por 6. Qual o resto da divisão desse número por 42?

RESOLUÇÃO:

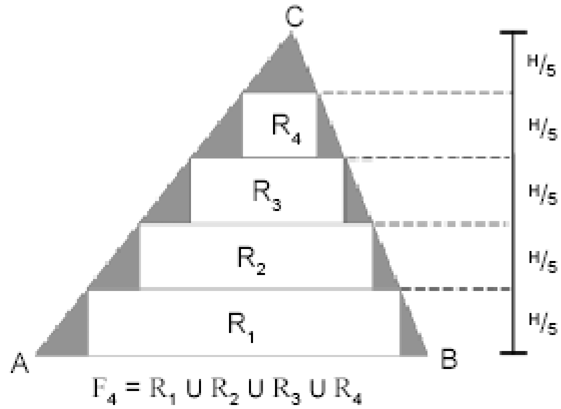
Considerando n o número em questão, temos:

$$\begin{cases} n = 7q + 3 \\ n = 6q'+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6n = -42q - 18 \\ 7n = 42q'+35 \end{cases} \Rightarrow n = 42(q'-q) + 17$$

RESPOSTA: O resto é portanto 17.

Questão 10:

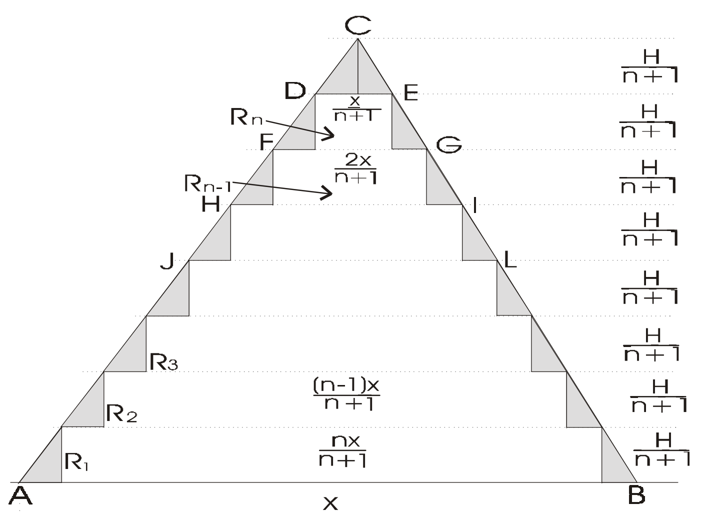
Considere o triângulo T, de vértices A, B e C, tal que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são agudos. Seja H a altura relativa ao lado AB. Para cada número natural n, seja F_n a figura formada pela união de n retângulos justapostos contidos em T (veja na figura o caso n = 4). Cada retângulo tem dois lados perpendiculares a AB medindo $\frac{H}{1+n}$ e um lado ligando AC a BC (o maior dos retângulos tem um lado contido em AB).



Sabendo que a área Do triângulo T é **a**, calcule, em função de **a** e de **n**, a diferença entre a área de T e a área de F_n.

Qual o limite da área de F_n, quando n tende a infinito?

RESOLUÇÃO:



No triângulo ABC, $S = \frac{x \times H}{2} = a \Rightarrow \mathbf{Hx = 2a}$

O triângulo CDE é formado da junção dos dois triângulos laterais a cada retângulo.

S (CDE) = $\frac{1}{2}\times\frac{x}{n+1}\times\frac{H}{n+1} = \frac{xH}{2(n+1)^2} = \frac{2a}{2(n+1)^2} = \frac{a}{(n+1)^2}$

Logo T -F_n = (n+1) $\frac{a}{(n+1)^2} = \frac{a}{n+1}$

Como T-F_n = $\frac{a}{n+1} \Rightarrow F_n = T - \frac{a}{n+1} = a - \frac{a}{n+1} = \frac{a(n+1)-a}{n+1} = \frac{an}{n+1}$.

$\lim_{n\to\infty} F_n = a$

RESPOSTA: a